RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA 143.

MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED.

29.

U ZAGREBU 1900.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE (DIONIČKE TISKARE).

Digitized by Google

Dionička tiskara u Zagrebu.

Digitized by Google

Sadržaj.

	Strana
O preobrazbi i dužini življenja naših pauka u opće a Filistatâ napose. Od prof. N. Damina	1—9
Pauci Dalmacije, Hrvatske, Slavonije i Istre (Araneae Dalmatiae, Croatiae, Slavoniae et Istrae, partim editae, partim usque ad a. 1900 ineditae). Od prof. N. Damina . . .	10—53
O posrednim proizvodima perspektivnih nizova tačaka. (Sa slikom u tekstu.) Od dra. Jurja Majcena	54—61
Pontsko-jadranska razvodnica i jadransko područje u Hrvatskoj. Od dra. Milana Šenoe	62—95
Jedno pitanje iz teorije funkcija sa dvjema nezavisno promjenljivim količinama. (Sa dvima slikama u tekstu.) Od prof. Mihaila Petrovića	90—106
Transcedentne transformacije algebarskih jednačina. (Sa slikom u tekstu.) Od prof. Mihaila Petrovića	107—141
O osobitoj ravnocrtnoj plohi trećega reda u linearnom kompleksu. Od dra. Jurja Majcena	142—154
O redovima jednogranih funkcija. Od dra. Bogdana Gavrilovića	155—160
O pfafijanima. Od dra. Bogdana Gavrilovića	161—170

Digitized by Google

Akademija vrlo žali, što je naknadno opazila, da se razprava člana dopisnika dra. Davida Segena, štampana u 141. knjizi »Rada« pod naslovom »Prilog novijoj geometriji«, slaže sa starijim štampanim radnjama i priručnicima, pak za to se ne će nastaviti njezino priobćivanje.

Iz skupne sjednice Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, dne 3. srpnja 1900.

Uprava akademije.

Digitized by Google

O preobrazbi i dužini življenja naših pauka u opće a Filistatâ napose.

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 16. lipnja 1900.

Napisao prof. N. Damin.

Općeno je mnijenje, da se svi skoro artropodi, izvalivši se iz jaja, presvlače ili lile po više puta, te mnogi još iste godine dozriju, a tada se — čim smetnu posljednji svlak — kopuliraju i jaja nesu. Tako biva i u paukâ. Ali neki araneolozi tvrde, akoprem o tom točna opažanja manjkaju, i to, da svi pauci žive samo godinu dana presvlačeći se nekoliko puta.

Tečajem svoga višegodišnjeg opažanja sám se uvjerih, da one vrste, što dozrijevaju u lipnju ili bar do polovice srpnja, pletu toga istoga ljeta (do studenoga za povoljna vremena) opretke ili kokone, ali ti mladići, akoprem su živi, ne izlaze iz kokona (pa bila i tri, četiri kokona od jedne ♀) sve do budućeg proljeća. Tada tek, čim nastanu topliji dani. probiju svoj zimski stan, tku mreže, da njima dođu do hrane, presvlače se 4—6 puta, te do srpnja dozriju. Ovakve samo vrste svrše svoj vijek te iste godine, jer dozrevši u srpnju, imadu vremena otkati kokone,[1] da u jeseni uginu. Evo primjera. Moji *Lathrodectus* i 13-guttatus-i presvlačili se 1894. ovako:

prvi:	drugi:	treći:
1. put 9. V.	1. put 30. IV.	1. put 16. V.
2. „ 22. V.	2. „ 14. V.	2. „ 29. V.
3. „ 7. VI.	3. „ 29. V.	3. „ 24. VI.
4. „ 30. VI.	4. „ 21. VI.	4. „ 7. VII.
bio zrio ♂	5. „ 4. VII.	bio zrio ♂
	6. „ 15. VII.	
	bila z. ♀	

[1] Vidi „Rad“ jug. akad. CXXVI.: Lath. 13. gutt. str. 126 (17).

Digitized by Google

Ovaki dakle pauci, imenice njihove ženke, žive izvan kokona od proljeća do jeseni, poklam su zimu prezimili u kokonu. Istakoh ženke, budući da mužaci skoro u svih vrsta ranije dozre[1] ali i ranije uginu, a to za to, jer se ne presvlače toliko puta koliko ženke i jer su nakon kopulacije izlišni — izuzevši možda *Attida* i još koje vrste — pa prela njihova ženka i više kokona.

Tko ne bi na kojekakve opstojnosti i prirodne pojave pazio, taj bi po ovom završio: Svi pauci žive samo godinu dana. Ali motrioci bit će se bili osvjedočili, da su neke vrste već zrele koncem travnja, a najviše ih dozrije u svibnju i lipnju.[2] To su one vrste, koje ostaše od prošle jeseni, a nijesu dozrele bile iz raznih uzroka: ili zbog hladna vremena, ili zbog pomanjkanja hrane, a ovo je obično posljedak prvoga, ili — a to je veoma često — što su se izvalili iz poznoga kokona. Treba bo na umu imati, da ima vrsta, koje pletu više kokona kroz godinu i mladići izlaze odmah na polje, dok druge vrste, pa možda iste familije, opredu za svoga vijeka redovno samo jedan kokon, a ne izlaze već prezime u kokonu.

Tko se hoće uvjeriti, koliko temperatura odnosno pomanjkanje hrane utječe na razvoj a po tom i na rasplod paukâ, neka pregleda ovu bilješku: *Micrommata virescens* Cl. presvukla se u mene, nakon što je izišla iz opretka:

1. put 3. VII.
2. „ 21. VII.
3. „ 1. VIII.
4. „ 8. VIII.
5. „ 30. VIII.
6. „ 29. IX.

Evo, u rujnu, budući da je bilo ostudnjelo, trebao je taj pauk skoro mjesec dana, dok se presvuče, pa upravo za to nije se te jeseni, akoprem još nije dozrio bio, ni svlačio više, već je prezimio zimu 1895—6., da do budućega svibnja dozrije, a u lipnju opredе kokon. Ovaj dakle živ prezimi.

[1] Od 17 *Lathrodectus*-a uzgojenih iz kokona bilo 7 ♀ a 10 ♂; svi ♂ bili već zreli do polovice srpnja, ♀ ni jedna do svršetka srpnja.

[2] Razmjerje dozrjelih pauka u pojedinim mjesecima kod nas — imenice u primorju — možemo si možda ovako najbolje predstaviti: Od stotine običnijih dozrije u III: 3 — IV: 8 — V: 27 — VI: 29 — VII: 6 — VIII: 17 — IX: 6 — X: 4%. Prema tome dozrije najviše postotaka u svibnju i lipnju (u ljetnoj, prvoj periodi), pak onda u kolovozu i rujnu (u jesenskoj, drugoj periodi). Ovo je podjedno mig sabiračima.

Digitized by Google

Uzmimo sada primjera radi razvoj jednoga *Uloborus Walckenaerii* Latr., što je izašao 2. VII. 93. iz jaja: taj se presvukao

1.	put	12. VII.	1893.	nakon
2.	„	19. VII.		7 dana
3.	„	24. VII.		5 „
4.	„	9. VIII.		15 „
5.	„	21. VIII.		12 „
6.	„	19. IX.		29 „
7.	„	26. II.	1894.	
8.	„	28. III.		31 dan

Po ovom u vrućem srpnju i prvoj poli kolovoza treba 5—6 dana (vrijeme je to, kad ima najviše tek iz kokona izišlih mladih većine vrsta), dok u rujnu treba 29 dana, a tada prestaje do proljeća zbog hlada i glada; ali i u hladnom proljeću treba razmak od mjesec dana, akoprem se „probudio“ već za prvih blažih dana veljače, da bude imao već početkom svibnja mlade. I ovaj prezimi živ, ali nezreo. *Micrommata* i *Uloborus* živjeli bi po ovom dvije godine, ali to je samo prividno, jer u istinu žive od srpnja jedne godine dajbudi do jeseni druge godine, dakle 15, 16 mjeseci.

Ali ima i takih (n. pr. *Epeira Circe*), koji, i to redovno, u kokonu prezime, recimo od rujna do travnja (8 mjeseci), tad izlaze i presvlače se, nu ne mogavši do jeseni dozreti, prezime opet, nezreli, u zimskom snu, recimo od prosinca do travnja (4 mjeseca), da se te, druge, godine dalje presvlače i do srpnja, kolovoza, u nepovoljnom slučaju i do listopada, dozre i kokon opletu, u kojem, kako već rekosmo, mladi prezime. Ovi dakle pauci žive 2 godine; ali pravo govoreći 12 mjeseci, ostalo prokubure što u kokonu (8 mj.) što u polusnu (4 mj.) bez hrane.

I ova evo opstojnost može obustaviti vrstu od rasploda t. j. ♀ može doživjeti iznimno i drugu godinu života, koja bi inače bila postigla svoje opredjeljenje pa i uginula prošle godine. Gojio sam ženku *Lathrodectus tredecim-guttatus* Rossi iz jaja. I dozrela u srpnju; no budući ne srela mužaka, ostala ona živa preko zime. Hranio sam ju muhama i drugoga ljeta bez ♂, ali mi crče vidno nevesela u srpnju. Ova ♀ bila bi u povoljnom slučaju od srpnja do zime sigurno oprela bar 2- 3 kokona i onda iztrošena uginula, ali osta sa spomenutog razloga živa do drugoga srpnja.

Pokušah ovom istom vrstom i prošle godine: Uhvatio sam 9. srpnja 1899. ispod hrpe kamenja u Lukovu otočkomu (u velebit. podgorju) nezrela *Lathrodectus-a*; presvlačio se u mene u ca-

Digitized by Google

klenki i dozrio: bila je ♀; bez ♂ prezimila zimu i tek u travnju 1900. uzeh ju nadalje hraniti — ali jeseni dočekati ne će.[1]

Prema tome nije čudo. što se neki arahnolozi u ovom pitanju ne slažu dok im podaci manjkaju. Poznati arahnolog dr. Fr. Dahl[2] izrijekom tvrdi ovo:

„Dr. Bertkau behauptet, dass die meisten unserer Spinnen länger als ein Jahr leben. Dies ist falsch. Jeder der auch niemals selbst Spinnen gesammelt hat, kann sich darüber gewissermassen ein eigenes Urtheil bilden, wenn er ein Spinnenverzeichniss z. B. von L. Koch, einem der fleissigsten Sammler überhaupt, hernimmt. Man wird darin bei den meisten Arten eine bestimmte Reifezeit des ♂ angegeben finden. Auch meine Beobachtungen — veli dr. Dahl — stimmen durchweg mit diesen Angaben überein."

Dr. Dahl ima u glavnome, ali ne skroz pravo: većina dozrijeva do konca lipnja; ovo je prva perioda; druge vrste dozrijevaju do podjesen; ovo je druga perioda — imajući navijek na umu izvanredne okolnosti.

Na ono mu odgovara dr. Bertkau[3] ističuć i neke dokaze odlučno: „Aus dem gleichzeitigen Vorkommen verschiedener Altersstufen derselben Art bei einer zu einer bestimmten und eng begrenzten Zeit stattfindenden Fortpflanzung folgere ich die auf mehr als ein Jahr ausgedehnte Lebensdauer dieser Art."

A dr. Dahl[4] će njemu: „...Dass man zur Reifezeit noch halbwüchsige Thiere findet, muss immer dann eintreten, wenn die Thiere auf einen engen Raum beschränkt sind, so dass sie nicht alle genügende Nahrung finden." — Ovo Dahlovo razlaganje ne zadovoljava, budući da je poznato, da se malne sve vrste pauka, čim probiju kokon, a mnoge i poslije, sele na razne krajeve, a svaka na svoj način (jedne samo vjetrom, druge bijegom, treće i vjetrom i bijegom), često na milje daleko; tà seoba pauka u proljeću i jeseni (vilina svila) pa i za cijeloga života i nema druge svrhe, nego da potraže zgodna staništa.

Ali dr. Bertkau trebao je upozoriti i na onu gori pripadom već istaknutu okolnost: kako naši pauci, s nekom iznimkom, tku za

[1] Uginu 16. kolovoza o. g.

[2] Saison-Dimorphismus bei Spinnen u Zoologischer Anzeiger 1885.

[3] Dr. Ph. Bertkau: Über den Saisondimorphismus und einige andere Erscheinungen bei Spinnen. Zoolg. Anzeiger 1885.

[4] L. c. p. 629.

Digitized by Google

vrijeme od par mjeseci više kokona. Mladi dakle iz prvoga kokona izlaze već nakon nekoliko dana i preobrazuju se; tako i iz drugoga, možda i trećeg... pa dok oni iz posljednjega kokona posve nezreli prezimuju, jer ih je zatekla zima, njihova su braća iz prvih kokona zrela ili skoro zrela — otuda eno one dvije periode, proljetna i jesenska. Tako n. pr. *Cercidia prominens (= Epeira p.)* Westr. otkala je na moje oči prvi kokon 23. V. u jutru, drugi kokon već 6. VI. Mladi od prvoga kokona izišli su i sele se i pletu mrežice 9. VI., dakle nakon 17 dana, t. j. ovi su se mladi svukli prvi put izvan kokona i žive samostalno, dok oni drugi iste majke tek iz kokona izlaze. A koja će tek razlika biti u zreloći jedne te iste vrste jedne te iste majke, ako pauk otke po 3—4 i više kokona! Oni, rekoh, od prvoga bit će do jeseni skoro zreli, dok oni iz posljednjega ne će možda ni izaći. Evo: meni pleo *Uloborus Walckenaerii* 15. VI. 92. o 4½ s. u jutru prvi, 25. VI., dakle već nakon deset dana, drugi, 7. VII. treći, 14. VII. četvrti, 25. VII. peti kokon. Jedna pak druga ♀ toga Ulobora otkala 7. VII. prvi, 16. VII. drugi, 27. VII. treći, 7. VIII. četvrti, a 21. VIII. peti kokon. — Mladići iz prvih kokona presvlačit će se za topla vremena brže, iz poznijih sporije: eto dakle u isto doba od jedne te iste vrste — i to od jedne majke — razne zreloće.

U vani našao sam već i četiri i pet kokona od jedne ženke *(Lathrodectus)* u jednom gnijezdu,[1] a gojio sam *Uloborusa* i sa šest kokona. Pa kad se uzme, da iz svakog ovog izađe 40—60 (a brojio sam i do 116) mladih, lako si je pomisliti i razmak starosti take braće: prvi skoro zreli, posljednji još u zipci.

Ali treba ovdje i opet upozoriti, da je *Lathrodectus* jednogodišnja životinjica, dok *Uloborus* malo ne dvogodišnja, i to s toga, što ženka onoga kasno dozori, a po tom i kasnije kokone tke, te će mladići, kao da osjećaju da je kolovoz na odmaku a hladno se vrijeme približava, izići iz svoga opretka tek u proljeću. Tako je jedan moj *Lathrodectus* god. 1893. otkao

1.	kokon	28. VIII.
2.	„	3. IX.
3.	„	14. IX.
4.	„	27. IX.
5.	„	11. X.
pače preko očekivanja 6.	„	2. XI., ako i bijaše veoma malen

[1] U Korniću na Krčkom otoku 4, u Bakru 5.

Digitized by Google

ali mladunčad ne izide ni od kojega, već tek u proljeću 1894.: jedni posljednjih dana travnja, drugi do polovice svibnja (16. V.), a i ova okolnost djeluje na dobnu razliku paučje braće, ako je i neznatna. Ovakih jednogodišnjih vrsta ima dosta, n. p. neke *Epeire*, kao *E. diadem ata*, *Circe* i dr., pa oprele one za života i samo jedan kokon -- veliki.[1]

Bit će nadalje poznato, da i *Attidae (Saltigradae)* tku više od jednoga, po 2—3 kokona: majka leži na jajima opredavši se opretkom, a kad mladi iziđu, iziđe i ona, da si traži hrane, jer već nosi druga jaja, a za malo će iznesti drugi kupčić, da se s njim i opet oprede. *Attidae* dakle jedne vrste a u raznom razvitku naći ćeš u isto doba.

I *Laterigradae* nesu po više kokona: dne 18. VII. 1896. iznese *Heriaeus Savignyi* gomilicu jajaca (oživjeli 4. VIII.), a opet drugu gomilicu 26. VIII. (oživjeli 6. X.).

U *Lycosa* opazih ovo: Dne 12. V. 91. otkala kokon i nosila ga na preljkama, drugi već dan izjela polovicu svoga kokona, ali oprela opet u noći od 30, na 31. svibnja drugi kokon, da ga i opet izjede 2. lipnja!

Ovo su samo nekoliki podaci iz vlastitoga opažanja, koji dovoljno svjedoče, da mora da bude u isto vrijeme kroz čitavo ljeto, a ne samo u određenu ograničenu vremenu, raznodobnih pauka dapače od jedne te iste majke, nakon što se je posljednji put presvukla te tako za rasplod dozrela. Stari samo mužaci pogibaju obično (izuzevši možda *Attida, Linymphia* i nekih drugih) poslije kopulacije, a najviše ih još zaglavi baš za kopulacije; ♀ ih ne trebaju, jer su spremile sjeme u svoje reservoire i za više kokona.

Malo više spomenuh pripadom, da ♀ tke kokon nakon što se je posljednji put presvukla i ukazala se zrelom. Sa toga stanovišta polazeći, a toga su mnijenja svi araneolozi, ustvrdio sam već jednom zgodom[2]: „Es ist bekannt, dass die Spinnen erst dann, wenn sie sich zum letzten Male gehäutet haben, reif, beziehungsweise für die Fortpflanzung fähig sind. Nach der Begattung, respective nach der ersten Ablage des Cocones häuten sich die Spinnen

[1] Nu ipak sam doživio, ako i rijetki slučaj, da je *Argiope Brunichii*, koja prede samo jedan, veliki kokon, oprela nakon 24 dana drugi kokon dne 17. listopada 1894. Dakako tome će bit bili doprinijeli lijepi dnevi i obilje hrane.

[2] Über Parthenogenesis bei Spinnen u Verhandl. der k. k. zool.-bot. Gesell. Wien. Jahrgang 1893.

Digitized by Google

nicht mehr", a po tom sam završio: da je moja *Filistata testacea (insidiatrix)* Forsk., što sam ju uhvatio 1891. u ljetu, te se u mene i u jeseni 1891. i u proljeću 1892. presvukla, a sve to vrijeme zatvorena bez ♂ tek 8. srpnja 1892. kokon oprela — da je, rekoh, ta *Filistata* ili parthenogenetički iznesla, budući da njeni mladi oživješe već 27. srpnja i. g. u jutru, ili je to — ako se parthonogeneza ne bi dala u ove vrste daljnjim opažanjima dokazati — siguran dokaz da se neke vrsti pauka i za zreloće, poklam su oprele plodni kokon, ponovno lile.

To bi se moralo ustvrditi zato, jer je ova *Filistata* bila već valjda oplođena, kad sam ju zatvorio, pa ipak se je u mene, akoprem zrela, ponovno presvukla, pače i poslije iznesenoga kokona.

Ja sam s toga uzeo i dalje motriti život *Filistata-e* od jaja do smrti, pak sam evo ovo pobilježio uz ostalo i za ovu našu raspravicu zanimljivih podataka:

Već 30. srpnja i. g. metnem od ove *Filistata-e* dvije mlade u caklenke, da ih motrim i bilježim presvlačivanje. Uzmimo ponajprije jednu na oko: prvi put svukla se izvan kokona 29. rujna 1892. Slijedeće zime nijesam joj davao hrane, čuvajući ju ipak od prestroge studeni. Kroz to vrijeme nije se presvlačila. Tek 19. svibnja 1893. svukla se drugi put, nakon sedam mjeseci, poklam je dobrano zatoplilo, a čim bivalo vruće tim se ona češće presvlačivala: treći put 30. lipnja, četvrti 31. srpnja, peti 26. kolovoza, šesti put 25. rujna, i bila sada godinu dana stara a imala 6 mm. dužine. Tek god. 1894. presvukla se opet početkom kolovoza po sedmi put; g. 1895. dne 16. kolovoza osmi put.

Mnijem, da je druge godine tek dozrela — ne mogu za stalno s toga ustvrditi, što se u ove vrste ne raspoznaje u ♀ tako lako zreloća kao u drugih naših pauka. I opet nakon godine dana, 8. kolovoza 1896. presvukla se je po deveti put; deseti put 25. srpnja 1897., jedanaesti put 15. kolovoza 1898., te je ovako doživjela 17. srpnja 1890., dakle 7. godinu starosti ili točnije 6 godina, 11 mjeseci i 17 dana bez ♂.

Nije se čulo do sada, da pauk može tako dugo živjeti!

Drugome mladome od one ženke nijesam bilježio svlakova; nu ubilježio sam posljednji svlak pred zreloćom: 28. kolovoza 1894. i ukazao se mužak; dvije su dakle godine uminule (od 27. VIII. 92. do 28. VIII. 94.) dok je dozrio.

Digitized by Google

A pitat će se: Što bijaše od stare im majke? Hranio sam ju i nadalje, a 29. rujna 1892. (uminulo po tom 83 dana otkada je kokon u mene oprela) vidjeh ju gdje o četiri sata i pô poslije podne visi na svojoj kožurini: opet se dakle presvukla, nakon što je već imala kokon. Ovakva presvlačivanja poslije zreloće t. j. poslije kopulacije odnosno nesenja nijesam ja, premda sam mnogo motrio, nikad još u pauka opazio, a niti je, što znam, u literaturi zabilježeno.[1]

Ali ona se i opet presvukla 6. kolovoza 1893., dakle drugi put otkad je imala u mojoj caklenki mlade: o $3^1/_4$ s. poslije podne nadjoh je gdje visi na abdomenu svoje odmetnute kože. Nu ne potrajalo dugo i već 21. rujna iste godine crče.[2]

Ovim htjedosmo utvrditi:

1. Dosta vrsta paukova žive prezimivši u kokonu od proljeća do kasne jeseni, kad opletu svoje kokone pak uginu.

2. Većina naših vrsta izišavši iz kokona odmah u ljetu presvlače se sveudilj dok zahlađi, nu ne mogavši dozreti te godine, prezimi nezrela, da već u proljeću ilit najkasnije do srpnja dozre i kokone otke. Ovaki žive 3—4 mjeseca više od onih prvih (recimo od lipnja ili srpnja do rujna ili listopada druge godine).

3. Mnogi opet žive 2 godine od proljeća do jeseni druge godine ne uračunavši onoga vremena, što bijahu, ako i živi, u kokonu.

4. Ženka može u nepovoljnom slučaju, n. pr. ne dospjevši do kopulacije, preživjeti svoju godinu do drugoga ljeta, al tada sigurno pogine.

5. Samo nekoji pauci — možebit neke *Cribellatae* i *Theraphosae* — dozrijevaju tek drugu godinu, a poslije kopulacije žive još najmanje dvije godine pletući kokone; bez kopulacije prožive i 6—7 godina, kao što se je ono na *Filistata insidiatrix* Forsk. dokazalo.

6. Većina vrsta otke za svoje zreloće više kokona; broj vlada se po temperaturi i hrani; manjina, imenice neke veće *Epeirae*, samo jedan oveći kokon.

7. Samo nekoji pauci presvlače se nakon što su svoju preobrazbu dovršili, dakle zreli, pa i poslije otkanoga kokona, ali tada, kad su već zreli, svaku godinu po jedan put, kako je na Filistati dokazano.

Jošte bismo imali odgovoriti na pitanje: Koliko se puta presvlače pauci do zreloće?

---

[1] Vidi Dr. Berthau l. c. o *Atypus piceus*.

[2] I ovu ♀ i njene mlade (♀ i ♂) imadem u svojoj zbirci.

Digitized by Google

Teško je na ovo odlučno odgovoriti, budući da imade u literaturi veoma malo podataka, skoro nikakvih. Prof. A. Ausserer[1] piše: „Die Anzahl der Häutungen, welche eine Spinne bis zu ihrer vollen Reife durchzumachen hat, scheint keine ganz bestimmte zu sein... Bei *Tegenaria civilis* liessen sich 8—9 Häutungen beobachten, bei *Zilla segmentata* 5, bei einigen anderen Epeiriden noch weniger.“ Poznati madžarski arahnolog Otto Herman[2] pak veli: „Die Häutungen, deren Anzahl mit voller Bestimmtheit nicht gesagt werden kann, und von denen es nur wahrscheinlich ist, dass sie sich bis zur vollen Geschlechtreife viermal wiederholen, umfassen alle Theilchen der äusseren Gestalt.“ Čuveni pak aranolog Eugène Simon pripominje u svojem djelu[3]: „Beaucoup d' auteurs ont admis qu'il y en avait quatre, mais, d'après W. Wagner, le nombre en est plus considérable et, au reste, il varie selon les espèces et les circonstances.“ — Ja sam pak opazio, da se nekoji pauci presvuku do potpune zreloće 4 puta i to mužaci, dok njihove ženke 6 puta *(Lathrodectus 13-guttatus)*, drugi opet oliliše se 6 puta, pak nijesu bili još ni zreli, već su dozreli tek budućeg proljeća *(Micrommata virescens)*, treći opet 8 puta *(Uloborus Walckenaërii)*, jedna *Argiope Brünichii* presvukla mi se 6 puta do zreloće i to: 1) 28. VI. 94., 2) 6. VII., 3) 16. VII., 4) 25. VII., 5) 3. VIII. 6) 14. VIII. I u istinu ove ženke u hrvatskom primorju pletu redovno svoje kokone već početkom rujna, neka kasnije sve do kasne jeseni.

Prema ovome ne može se još odrediti broj liljenja u ovoga direktnoga, ametabolnoga razvoja paukâ sve dotle, dok se ne pobilježi množina točnih opažanja. Po svoj prilici stoji presvlačenje pauka do klimatičkih, vrsnih, a možda i drugih opstojnostî.

[1] Beobachtungen über Lebensweise, Fortpflanzung u. Entwickelung der Spinnen, Wien.

[2] Magyar. pok. fauna. Ungarns Spinnen I. Bd. Budapest. 1876.

[3] Histoire naturelle des Araignées, deuxième édition, T. I. Paris 1892.

Digitized by Google

Pauci Dalmacije, Hrvatske, Slavonije i Istre.

(Araneae Dalmatiae, Croatiae, Slavoniae et Istrae, partim editae, partim usque ad a. 1900 ineditae).

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. listopada 1900.

Napisao prof. N. Damin.

Pripomena.

Ponukan od nekih svojih prijatelja, a prema pozivu slavne naše akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu, odlučio sam se evo, da izdam hrvatske Araneae u koliko su nam do danas poznate. Segnuo sam dakle za čitavom literaturom ovoga reda člankonožaca od najstarijih pripomena sve do danas, prema tome uvrstio sam u ovaj rad i one svoje i svojih prijatelja u zadnjim godinama pribrane a jošte nigdje ne izdane pauke. Ovo sam već i zato dužan bio uraditi, što je i meni slavna naša akademija namakla bila pripomoć za istraživanje naše zemlje, na čem joj i ovom zgodom hvalim.

Hvalim i svojim prijateljima, koji su mi sabrali i poslali dobrano materijala, imenice je sabrao dr. prof. Aug. *Langhoffer* građe okô Grižana, Bribira, Zagreba, Božjakovine i Osijeka. dr. prof. Stj. *Varićak* oko Osijeka, dr. prof. Stj. *Plivelić i* prof. V. *Canjuga* oko Zemuna, prof. Fr. *Šmid* oko Zagreba, prof. L. *Roić* oko Topuskoga, inžinir Đuro *Stipetić* oko Ogulina i šumar *Ružić* oko Križevaca. Napose hvala profesoru i akademiku W. *Kulczyńskomu* u Krakovu, koji mi je i ovaj put neke vrste pregledao a neke i označio; napokon profesoru i akademiku Spiri *Brusini,* što mi je sva muzealna djela ove struke dobrohotno na porabu dao.

Literatura.

1. *Fortis A.:* Viaggio in Dalmazia, 1774. Venezia. Ovo je prvo djelo, u kojem se strani pisac pozabavio o dvama našim i to otrovnim paucima. Govoreći o prvom „pauku“ pripominje, da je to „una

Digitized by Google

spezie di Tarantola, similissima a quella di Calabria e di Puglia." Pa i jest to po daljnjem njegovom opisu i po našem osvjedočenju Tarantula Apuliae Walck. Drugi mu je Malmignatta, a taj mu je „Ragno variegato, di corte gambe, conosciuto in Corsica sotto il nome Malmignatto", a to je Lathrodectus tredecim guttatus", kojega se Dalmatinci još više boje nego Tarantule.

2. *Dr. C. W. Hahn (I—II.)* i *C. L. Koch (III—XVIII.):* Die Arachniden getreu nach der Natur abgebildet und beschrieben, Nürnberg 1831—36. — Vrste pod „jenseits der Alpen" spadat će i na naše područje.

3. *Dr. Carrara F.:* La Dalmazia descritta, 1846. Zara. Pisac nabraja do pedeset pauka, između ovih četiri nove vrste, koje je opisao Rossi u Beču, i to: Eresus fulvus, Philodromus cammarus, Opilio acanthopus, Platilophus Heegeri.

4. *Dr. Dolescsal L.: Systematisches Verzeichniss der im Kaiserthum Österreich vorkommenden Spinnen* u *Sitzungsbericht der math.-naturwisschaftl. Classe der k. Akademie der Wissensch. IX. Bnd, Wien 1952.* — Spominje nekolike vrste hrvatsko-dalmatinskih, između kojih pet novih: Lycosa punctiventris, Philia setigera, Attus Mannii, Epeira dalmatica, Ischyropsatis Redtenbacheri.

5. *Doblika K.: Beitrag zur Monographie des Spinnengeschlechtes Dysdera* u *Verhandlungen der zool.-bot. Gesellschaft in Wien 1853.* — Opisuje Dysderu Kollari, novu vrstu za Dalmaciju, navodeći i D. punctata (Vidi ob ovoj Ar. Hung. II. 267.); za Kranjsku D. Hombergi i D. erythrinu za Dubrovnik.

6. *Dr. Grube Ad. Ed.: Ein Ausflug nach Triest u. Quarnero, Berlin, 1871.* — Nekoje vrste za Rijeku.

7. *Keyserling Eug.: Beschreibung neuer Spinnen mit einer Tafel (X).* u *Verhandlungen der k. k. zool.-bot. Gesellsch. in Wien, 1862.* — Zabilježio je ubrani Erbenom na Hvaru Ciniflo Erberi, Ero laevigata i Epeira 6-tuberculata, dok pod općim imenom Dalmacije donosi Lycosa vittata i Saltiscus dalmaticus.

8. — —: *Beschreibung einer neuen Spinne aus den Höhlen von Lesina* u *Verh. der k. k. zool.-bot. Ges. in Wien, 1862.* — Opisuje: Stalita taenaria i Hadites tegenarioides.

9. *Simon Eug.: Histoire naturelle des Araignées, Paris, 1864.* — Tuj se navode neke vrsti iz drugih djela.

10. — —: *List des espèces européennes et algériennes de la famille des Attidae composant la collection de M. le Comte E. Key-*

Digitized by Google

serling u *Annales de la Soc. Entom. de France. Paris, 1878.* — I tuj se navode neke dalmatinske vrste.

11. — —: *Arachnides recueillis en Sebenico en Dalmatie* u *Annales de la Société entomolog. de France, ser. 5. tome 10. pag. XXXV.* Opisuje novu vrstu Coelotes Munieri.

12. — —: *Monographie des espèces européennes de la Famille des Attides. Paris, 1869.* — Navodi pod imenom „Illyrie, Dalmatie" sedam vrsta, pa i za Kranjsku i Trst pet vrsta.

13. *Dr. Koch Ludwig: Die Arachniden-Familie der Drassiden, 1—7 Heft mit Kupfertfl. Nürnberg 1866—67.* Pisac navodi 17 vrsta iz obitelji Drassida pod općenim imenom „Dalmatien".

14. — —: *Die europäischen Arten der Gattung Cheiracanthium, 1864.*

15. — —: *Die Arachnidengattungen Amaurobius, Coelotes und Cybaeus, 1868.*

16. *Canestrini G. e Paresi P.: Araneidi Italiani* u *Atti della Società Italiana di Scienze Naturali Vol. XI. fas. III. 1868. (Separ. Modena 1869).* — Navodi 64 vrste dotadanjih pisaca, i to 39 pod općenim imenom „Dalmazia", 2 za otok Hvar, 1 za Spljet. 1 za Kotor, 15 za Istru, 1 za Rijeku, i 5 vrsta za Trst.

17. *Thorell T.: On European Spiders, Upsala 1869—70.*

18. — —: *Remarks on Synonyms of europcan Spiders, Upsala, 1870—73.*

19. — — *Descriptions of several european and North-African Spiders, Stockholm 1875.* — U spomenutim djelima pripominju se također neke dalmatinske vrste.

20. *Ausserer Anton: Neue Radspinnen* u *Verhandlungen der k. k. zool.-bot. Gesellsch. in Wien, 1871.* Opisuje novu vrstu za Dalmaciju: Zilla Keyserlingii (vidi pod Epeira, Keys.) Zilla Thorelii, Peniza europea i dr.

21. *Herman Otto: Magyarország Pók-Faunája — Ungarns Spinnen-Fauna im Auftrage d. k. ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Bd. I—III., Budapest 1876—1879.* — Navodi za hrvatske strane samo nekoliko vrsta: za Dalmaciju 8, za Hvar imenice 1, a navodi i za Istru 2, za Kranjsku 2 i za Koruśku 1 vrstu.

22. *Lebert Hermann: Die Spinnen der Schweiz, ihr Bau, ihr Leben, ihre systemat. Übersicht, Berlin 1878.* Navodi samo nekoje i to južne vrste.

Digitized by Google

23. *Becker Leon: Les Arachnides de Belgique* u *Annales du Musée r. d' Histoire naturelle de Belgique, premiere partie, avec un Atlas de 27 Pl., Bruxelles 1882.* Spominje za naše područje pod imenom Dalmacije 4, za Zadar 8, Šibenik 2, Iliriju 1, Istru 2, pak i za Kranjsku 2 vrste.

24. *Gasperini R. prof.: Prilog fauni dalmatinskih pauka (araneae et opiliones), Spljet 1891.* Drugi popis izađe popunjen i poispravljen god. 1892. pod naslovom: *Prilog k dalmatinskoj fauni Cisopoda, Myriopoda, Arachnida, Spljet*, navodeć samih aranea 229 vrsta, a uračunavajuć i one ostalih auktora.

25. *Chyzer Cornelius et Kulczyński Ladislaus: Araneae Hungariae secundum collectiones a Leone Becker pro parte perscrutatas conscriptae a Cor. Chyzer et Lad. Kulczyński. Budapest. Tom. I. 1892., Tom. II. pars 1. 1894. Tom. II. pars posterior 1897.* — Ovo je djelo po našu faunu važno s toga, što se ovdje navode mnoge hrvatske vrste i što veleučenim piscima pripomažu naši ljudi. — Ovome je djelu usporedno za milenijske svečanosti izdao

26. *Dr. Cor. Chyzer: Fauna regni Hungariae: Aranoidea,* Budapest 1896.

27. *Nosek Ant. prof.: Seznam českých a moravských parouků, v Praze 1895. Věstnik kr. české společnosti náuk. Třida math.-přírod. 1894.* — Pisac navodi mnoge vrste i staništa „dalmatinskih, primorskih, hrvatsko-slavonskih i istarskih“ pauka po djelima drugih auktora.

28. *Kulczyński Wladislaw prof.: Über die Theridioiden der Spinnenfauna Ungarns* u *Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn B. XII. Berlin, Budapest, 1895.* Tuj spominje taj poznati araneolog neke vrste hrvatske kao Oroodes paradoxus (Lucas) iz Rijeke, Lasceola croatica Chyzer iz Bakra i Crkvenice, Taranuenus Croaticus Cyzer iz Vrata (Fužine), pak južnu vrstu Linyphia frutetorum C. L. Koch var. punctiventris Kulcz. i Centramerus similis Kulcz., koja je poznata i iz Bakra. Riječju ovdje se ističu teze familije mnogobrojnih Theridioida.

29. — —: *Arachnoidea, opera Rev. E. Schmitz collecta in insulis Maderianis et in ins. Selvages dictis. 4 tab. Cracoviae, sumpt. academiae lit. 1899.* I poseb. otisak. — Pisac u ovom djelu poređuje na nekolikim mjestima naše neke hrvatske vrste sa stranima.

Digitized by Google

30. *Bizó Lajos: Különlenyomat a „Természettudományi Közlöny" 304. Füzetéből.* Pripominje uz neke druge otrovne pauke Lathrodectus tredecim guttatus, što no ga je N. Damin u Bakru a gospođa Chyzer u Senju (nezrela) uhvatila.

31. *Dr. Gundrum Fran S.:* Liečnički viestnik, g. 1899. XXI. br. 3. str. 83 i br. 5. str. 150: Ugriz od pauka (Latrodectus 13-guttatus).

32. *Damin N. prof.: O pauku: Uloborus Walkenaeri Latr.* u Glasniku hrv. naravoslov. družtva, VI. godina, Zagreb 1891.

33. — —: *Iz života pauka Argiope Brünnichi (Scop.) sa tablicom* u Glasniku hrvatskog naravoslovnog družtva, VII. godina. Zagreb 1892.

34. — —: *Über Parthenogenesis bei Spinnen, Verhandlungen der k. k. zool.-bot. Gesellsch. in Wien, Jahrg. 1894.*

35. — —: *Attus Damini, Chyzer* ♀ u Glasniku hrv. naravosl. družtva, VIII. god. Zagreb 1894.

36. — —: *Prilog fauni dalmatinskih i istarskih pauka* u Glasniku hrv. naravosl. društva, IX. god. Zagreb 1896.

37. — —: *Lathrodectus 13-guttatus (Rossi)* u „Radu" jugosl. akademije znanosti i umjetnosti, CXDVI. knjiga. Zagreb 1896.

38. — —: *O preobrazbi i dužini življenja naših pauka u opće a Filistatâ napose,* u „Radu", u istoj ovoj knjizi 143.

39. *Castelli Giovani:* Araneidi di Lesina (koje posla G. B. Novak profesoru G. Canestrini-u u Padovu), Padova 1892. (Vidi br. 24.).

40. *Dr. Gustav Braun:* Ueber Lathrodectus tredecim guttatus u Wiener Medizinische Presse, Jhrg. XL. No 6. 1899.

Aranеae theraphosae.

Fam. **Avicularlidae.**

Gen. Nemesia Savigny.

1. *N. radiata* Kulcz. 23./X. 1889. ♂ a 28./IV. 1890. ♀ i zrelih i nezrelih po više exemplara u dvorcu pred kućom na Zagradi u Bakru.*

2. *N. Sauvagesii* Dorth = caementaria Latr. Spljet (24).

Gen. Brachytele Auss.

3. *N. icteria* C. Koch = Mygale C. Koch u dr. F. Carrare (3).

* Nadodao sam, u koliko mi moje bilješke kazivale, dan i mjesec ulovljena ♂ ili ♀, neka se znade, kada pojedina vrsta dozrijeva.

Digitized by Google

Gen. Atypus Latr.

4. *A. anachoreta* L. Koch var. castanea Ausserer (Beitr. z. Kennt. d. Arachnidf. der Territelariae u Verh. d. zool.-bot. Gesellschaft. Wien, XXI. 1871.) — Rijeka.

Araneae verae: Cribellatae.

Fam. **Uloboridae.**

Gen. Uloborus Latr.

1. *U. Walckenaërii* Latr. — Kotor, Muo, Skradin, Buk Krke, Komiža (Vis), Brusje (Hvar) [24], Krk: Voz, Omišalj; Starigrad (Podgorje), Sv. Juraj, Senj, Novi. Crkvenica, Vinodol, Grižane, Sv. Jelena, Kraljevica 24./V. cop. 15/VI. coc., Bakar [32], cocon 27./VI. 93., Vrdnik (Fruška gora) [25].

2. *U. plumipes* Luc. — Budva, Solin, Pećine (Vran. blato) iz coc. 26./VIII. 94., Starigrad (Podgor.).

Gen. Hyptiotes Walck.

3. *H. paradoxus* C. L. Koch. — Kotor, Muo, Porat Polača (o. Mljet), Spljet, Brusje [24]; Glavotok, Košljun, Omišalj (o. Krk); Bakar VII. ♂, Kostrena sv. L.; Bitoraj ♂ ♀ 26./VI. 92., Mrzla vodica, Đakovo [25], Plitvice [25].

4. *H. anceps* Walck. — Crkvenica; Bakar, Kostrena sv. L. juv. (25).

Fam. **Zoropsidae.**

Gen. Zoropsis Sim.

1. *Z. ocreata* (C. L. Koch). — Šibenik, Spljet, Brusje (24); Punat, Glavotok; Novi, Crkvenica, Sv. Jelena, Bakarac, Bakar već 5./IV. 92. ♀, 31./X. 92. ♂, Martinjšćica.

2. *Z. lutea* Thor. — Spljet [24].

Fam. **Dictynidae.**

Gen. Amaurobius C. L. Koch.

1. *A. ferox* (Walck). — Krk, Košljun, Sv. Ivan; Velebit, Jasenak, Križevci, Đakovo [25], Osijek, Zemun.

2. *A. fenestralis* (Stroem.) — Dalmacija [3], Ratulje, Mosunje, Rijeka [25], Kraljevica.

3. *A. obustus* L. Koch. — Risnjak, Vrata (Fužine), Kriviput (k. Senja) [25].

4. *A. Erberi* (Keys.) sub Ciniflo, Beschreib. n. Sp. 1863. — Polača, Hvar, Spljet, Zadar; Krk, Punat, Sv. Duh, Košljun; Bag,

Digitized by Google

Jablanac, Lukovo (otočko), Francikovac (k. Senja) [25], Bakar, Draga gornja, Sušak, Rijeka, Plitvice [25].

Gen. Titanoeca Thor.

5. *T. Schineri* L. Koch. — Solin.

6. *T. tristis* L. Koch. — Omiš, Spljet, Solin, Novigrad, Senj, Crkvenica, Kraljevica, Bakar 12./VIII. ♂, Sv. Kuzma, Meja, Martinjšćica, Rijeka, Trsat, Orehovica.

7. *T. Kochii* Auss. — Spljet (24).

Gen. Lathys Sim.

8. *L. humilis* (Blackw.) = Ciniflo = Lethia. — Omišalj, Malinska, Košljun; Novi, Crkvenica, Bakar, Rijeka [25], Križišće; Vrata (Fužine) 25.

9. *L. heterophtalma* Kulcz. — Bakar, Crkvenica (25).

10. *L. puta* (O. P. Cambr.). — Bakar [25].

Gen. Dictyna Sundv.

11. *D. civica* Luc. — Spljet, Zadar, Novigrad; Krk, Punat, Omišalj; Senj, Kraljevica, Bakar, Draga gor., Meja.

12. *D. ricina* Sim. — Bakar, Trsat; Đakovo [25], Osijek.

13. *D. uncinata* Thor. — Velebit, Ogulin, Lipik, Đakovo [25], Osijek, Zemun.

14. *D. arundinacea* (Lin). — Spljet, Starigrad (Hvar), Jablanac, Sv. Juraj (Borova draga), Senj, Bakar 17./V. 90. ♀, Zagreb, Stenjevac, Lipik, Đakovo [25], Osijek.

15. *D. latens* (Fabr.). — Solin; Omišalj; Bakar 18./VI. 92., Orehovica [25], Rijeka, Plitvice [25], Đakovo, Vrdnik [25].

16. *D. flavescens* (Walck.). — Kotor, Vis (grad), Starigrad (Hvar); Sv. Juraj, Novi, Vinodol, Bakar 23./V. 90., Ratulje, Trnovica, Trsat; Lipik [25], Osijek.

17. *D. viridissima* (Walck.). — Vis, Starigrad (o. H.), Brusje [24], Pećina (Vran. blato), Vrbica; Omišalj; Bakar 2./IX. 92., Bakarac, Meja; Đakovo, Pazua st. [25].

Fam. **Eresidae.**

Gen. Eresus Walck.

1. *E. niger* (Petagna) = cinnabarinus (Oliv.). — Dalmacija [3], Sv. Filip i Jakov (k. Zadra) ♀ 13./VII. 99.; Karlobag ♀ posve crna VIII. 99. — Vidi [25] pull. — Senj ♂ ♀ 7./VII. 99., Novi, Bakar ♂ 11./IX. 1900., Crkvenica, Rijeka [25].

2. *E. ruficapillus* C. Koch. — Brusje [24].

Digitized by Google

Fam. **Filistatidae.**

Gen. Filistata Latr.

1. *F. insidiatrix* (Forsk.) = testacea Latr. [29]. — Dubrovnik, Vis, Starigrad (o. H.), Spljet [24], Solin, Vrbica, Vrana (Han); Kornić, Glavotok, Omišalj, Voz (Krk); Karlobag, Jablanac, Lukovo otoč., Senj, Povile, Novi ♂ ♀ 4./VII. 94., Crkvenica, Sv. Jakov, Kraljevica, Bakar 27./VI. coc., Rijeka, Kostrena, Volovsko, Opatija, Lovran, Plitvice [25].

2. *F. nana* Sim. — Košljun, Krk, Sv. Duh; Karlobag, Lukovo, Sv. Juraj, Senj, Novi, Povile, Crkvenica, Kraljevica, Bakar 18./VII. 92. ♀ na coconu, Kostrena, Meja, Rijeka, Plitvice [25].

3. *F. pallida* Kulcz. — Crkvenica ♂ (25). Vide (29) p. 5.

Araneae verae: Ecribellatae.

Fam. **Sicariidae.**

Gen. Scytodes Latr.

1. *S. thoracica* (Latr). — Hvar, Starigrad (o. H.), Spljet, Brusje [24], Cavtat, Buk Krke, Arbanasi, Novigrad, Krk, Košljun, Kornić, Omišalj; Karlobag, Jablanac, Lukovo ot., Senj, Povile, Crkvenica, Bakar 2./VII. cocon, Rijeka, Trsat, Grobničko polje (sa kokonom 2./VII. 93.), Meja, Jasenak, Zemun [21], Osijek [25].

Gen. Loxosceles Hein et Lowe.

1. *L. rufescens* Duf. — Spljet [24].

2. *L. erythrocephala* C. Koch. — Spljet [24].

Fam. **Dysderidae.**

Gen. Dysdera Latr.

1. *D. longirostris* Doblika (= longitarsis O. Her.). — Đakovo, Vrdnik [25].

2. *D. Westringii* Cambr. — Osijek [25].

3. *D. punctata* C. L. Koch. — (Vidi Doblika 5 i Ar. Hung. II. 267). Rijeka (Ombla), Spljet, Konjsko [24], Trogir, Filip i Jakob; Punat, Kornić, Malinska, S. Juraj; Trnovica.

4. *D. crocata* C. L. Koch. — Spljet [24], Trogir, Senj [♀ 21].

5. *D. Ninii* Can. et Pav. — Spljet (24), Jablanac, Francikovac, Novi, Crkvenica, Bakar, Martinjšćica, Draga gor., Sušak, Rijeka, Orehovica, Vrata (Fuž.), Risnjak, Mrzla vodica, Otočac, Plitvice, Đakovo [25].

Digitized by Google

6. *D. Kolari* Doblika. — Dalmacija: Kotor [5], S. Kuzma ml. ♂, Kraljevica [25].

7. *D. erythrina* Latr. (= D. Cambridgii Thor. 1873.). — Carrara 1846. Spljet, Dubrovnik [5].

8. *D. hungarica var. adriatica* Kulcz. — Bakarac, Martinjšćica, Orehovica, Vrata, Risnjak (25).

Gen. Harpactes Templeton.

9. *H. rubicundus* (C. L. Koch) = Dysdera rub. C. L. K. Arach. V. 1839. — Rijeka [6].

10. *H. lepidus* C. L. Koch. — Brušane, Mrzla vodica [25].

11. *H. amoenus* Kulcz. — Crkvenica ♀ [25].

12. *H. Canestrinii* L. Koch. — Bakar, Bakarac (iuv.), Martinjšćica (iuv.), Gospić (iuv.) [25].

Gen. Stalita Schiödte.

13. *St. taenaria* Schiödte. — Hvar [8].

14. *St. gracilipes*, Kulcz. — Kod Pazarišta u pećini Kusica [25].

Gen. Segestria Latr.

15. *S. florentina* (Rossi) = S. perfida Walck. — Kotor, Rijeka (Ombla), Spljet, Brusje [24], Buk Krke, Vrana; Košljun; Jablanac, Senj, Povile, Bakar, Bakarac, Rijeka. — Vide (29) p. 26.

16. *S. bavarica* C. L. Koch. — Brusje [24], Jablanac, Sv. Juraj, Senj, Povile, Bakar, Martinjšćica [25].

17. *S. senoculata* L. — Spljet [24], Buk Krke, Skradin, Novigrad; Košljun; Prevez (zaliev Rašc); Karlobag, Senj, Bakar 2./IX. 89. ♂, Velebit, Plitvice. Ogulin, Vrata, Bitoraj, Kuterevo [25].

18. *S. pantherina* Dol. — Dalmacija, Doleschal [4].

19. *S. croatica* Dolesch. — Zadar 20./VII. 94., Bakar, Martinjšćica [4].

Fam. **Drassidae.**

Gen. Drassodes Westr. Drassus.

1. *D. lapidicola* Wk. — Makarska, Starigrad n. H., Brusje [24], Spljet, Šibenik, Buk Krke; Krk, Punat, Lunte, Košljun, Sv. Duh, Bergud, Omišalj; Karlobag, Lukovo, Senj, Francikovac [25], Novi, Crkvenica, Kraljevica, Bakar na coc. 17./VI. 93., Kostrena Sv. L., Velebit, Risnjak, Crnidabar, Đakovo [25].

var. macer Thor. — Rijeka, Otočac [25].

2. *D. minusculus* L. Koch. — Spljet, Brusje [20] = D. dalmatensis L. Koch [13], Senj, Rijeka [25].

Digitized by Google

3. *D. lutescens* L. Koch. — Kotor, Spljet [24].
4. *D. troglodytes* C. Koch. — Spljet, Brusje [24]; Punat, Kornić.

Gen. Phoeocedus Sim.

5. *Ph. braccatus* L. Koch. — Senj, Rijeka [25].

Gen. Leptodrassus Sim.

6. *L. femineus* Sim. — Lukovo, Crkvenica [25].

Gen. Scotophaeus Sim.

7. *S. quadripunctatus* (L) = Drassus rubeus Westr. — Jasenak [25]. Bakar 26./V. 91., Kraljevica 31./VII. 99. ♀.
8. *S. scutulatus* (L. Koch) = Drassus sc. — Spljet [24], Senj [25].
9. *S. macellinus* Thor. — Brusje [24].
10. *S. viator* (L. Koch.) — Dalmacija [13].
11. *S. striatus* (L. Koch.) — Dalmacija [13].
12. *S. tenuis* (L. Koch.) — Dalmacija [13].

Gen. Drassus Walck.

13. *D. montenegrinus* Kulcz. — Rijeka (♀ Ar. Hung. II. 214).

Gen. Prosthesima L. Koch.

14. *P. subteranea* (C. L. Koch). — Spljet, Šibenik, Zadar, Filip i Jakov, Novigrad.
15. *P. apricorum* (L. Koch?). O. Hermana P. Petiverii. — Breze, Viševica, Plitvice, Ogulin [25].
16. *P. clivicola* (L. Koch). — Risnjak [25].
17. *P. Latreilei* Sim. — Dalmacija (Can. et Pav. sub. Mel. atra, v. 16), Osijek, Đakovo [25].
18. *P. oblonga* (C. L. Koch). — Dalmacija [16], Punat, Karlobag, Jablanac, Crkvenica, Bakar, Škrljevo, Martinjšćica.
19. *P. electa* (C. L. Koch). — Velebit [25].
20. *P. femella* L. Koch. — Spljet, Brusje [24], Dalmacija C. L. Koch o. c.
21. *P. Hermani* Chyz. (= tragica Her.) — Senj, Francikovac, Bakar 14./V. 90. ♀, Sv. Kuzma; Kuterevo, Vrata [25].
22. *P. praefica* (L. Koch). — Dalmacija [13]. — Kriviput [25].
23. *P. pusilla* (C. L. Koch). — Spljet [24], Đakovo [25].
24. *P. pumilla* (C. L. Koch). — Crkvenica [25].
25. *P. accepta* O. Her. — Crkvenica, Bakar; Đakovo [25].
26. *P. gracilis* (Canest.) — Crkvenica [25].
27. *P. caucasia* (L. Koch). = P. allionica O. Her. — Omišalj.
28. *P. circumspecta?* Sim. — Crkvenica ♀, Senj ♂ [25], Karlobag.

Digitized by Google

29. *P. rustica* L. Koch. — Bakar.

30. *P. Lyonnetii* (Aud.) = Drassus secretus Thor. — Dalmacija [16]; Omišalj, Punat; Senj, Crkvenica.

31. *P. pedestris* (C. L. Koch). — Buk Krke; Krk. Kornić, Omišalj, Sv. Duh, Sv. Ivan; Bakar, Martinjšćica, Rijeka.

32. *P. barbata* (L. Koch). — Spljet, Trogir; Omišalj, Sv. Duh; Senj, Crkvenica, Rijeka [25].

33. *P. Carmeli,* Cambr. — Spljet [24].

Gen. Poecilochroa Westr.

34. *P. conspicua* (L. Koch). — Dalmacija [13].

Gen. Aphantaulax E. Sim.

35. *A. Albini* (Sav.) — Dalmacija [16], [13], [24], Bakar 18./VI. 90. ♀.

36. *A. seminigra* Sim. — Kotor, Solin; Košljun; Senj, Novi, Crkvenica, Sv. Jelena, Rijeka; Vrdnik [25].

37. *A. cincta* (L. Koch). — Brusje [24], Bakar, Vrdnik [25].

Gen. Gnaphosa Latr.

38. *G. bicolor* (Hahn). — Polača, Velebit [25].

39. *G. modestior* Kulcz. — Đakovo ♂ [25].

40. *G. lucifuga* (Walck). — Dalmacija L. Koch sub Pythonissa, Carrara: Drassus lucifuga, Kotor, Cavtat; Košljun, Prevez (zaliev Raše); Francikovac (25), Kraljevica, Bakar 16./X. 91. ♀, Križišće, Rijeka.

41. *G. adriatica* Kulcz. — Crkvenica [25].

42. *G. Kulczyński* Damin. — Buk Krke 24./VII. 94. [36].

43. *G. zeugitana* Pav. — Crkvenica (Fau. Hung.) [25].

Gen. Callilepis Westr.

44. *C. nocturna* (L). — Kubus (Velebit), Kriviput, Vrata [25], Bakar 15./V. 93. ♂.

45. *O. Schusteri* (O. Her.) — Crkvenica, Bakar, Rijeka; Plitvice [25].

Gen. *Pythonissa* C. L. Koch.

46. *P. exornata* C. L. Koch. — Vis, Solin, Spljet, Arbanasi; Punat, Kornić, Krk. Malinska, Sv. Ivan, Sv. Duh, Omišalj; Karlobag, Lukovo, Senj, Crkvenica, Kraljevica, Bakar, S. Kuzma, Meja, Martinjšćica, Orehovica, Rijeka; Vrdnik [25].

47. *P. Ausserei* (L. Koch). — Spljet [24]. Karlobag, Senj, Crkvenica, Kraljevica, Meja [25].

48. *P. molendinaria* L. Koch. — Dalmacija [13].

Digitized by Google

Fam. **Zodariidae.**

Gen. Zodarium Walck.

1. *Z. elegans* (E. Sim). = Envo. — Brusje [24], Karlobag, Bakar, Crkvenica.

2. *Z. germanicum* (C. L. Koch). — Karlobag, Bakar 28./VI. 91. ♀. Đakovo, Vrdnik [25].

3. *Z. graecum* (C. L. Koch). — Spljet [24], Senj, Crkvenica.

4. *Z. italicum* (Can.). — Bakar 3./IV. 92. ♂ ♀, Omišalj 12./V. ♀ ♂.

5. *Z. gallicum* (E. Sim). — Bakar, Crkvenica.

6. *Z. longipes* Sav. et Aud. = Argus l. W. — Dalmacija [3].

Fam. **Uroctеidae.**

Gen. Uroctea Duf.

1. *U. Durandii* Latr. — Brusje, Konjsko [24], Starigrad o. H., Šibenik, Lusinj m., Krk: Omišalj, Sv. Vid, Malinska, Košljun; Prevez (Raša); Jablanac, Lukovo, Senj, Novi, Povile, Crkvenica, Grižane, Bakar ♂ 26./VIII. — 22./IX. 94., Bakarac, Kraljevica, Draga, Martinjšćica, Rijeka, Grobničko polje.

Fam. **Pholcidae.**

Gen. Pholcus Walck.

1. *Ph. opilionides* (Schrank). — Krk: Punat, Omišalj; Crkvenica, Bakar, Martinjšćica, Kostrena Sv. L., Rijeka, Grobničko polje, Jelanje 2./VII. 93. ♀, Ratulje, Jaska, Zagreb, Lipik, Osijek.

2. *Ph. phalangoides* (Fuess.) — Dalmacija [3], Zadar, Pećine (vrelo); Krk, Košljun, Kornić, Omišalj; Jablanac, Senj, Novi, Bribir, Crkvenica, Bakar, Rijeka, Trnovica, Otočac, Jaska [25], Zagreb, Topusko, Osijek, Zemun.

Gen. Holocnemus Sim.

3. *H. Forskalii* (Thor.). — Jasenak, Osijek ♂ 30./XI. 93., Zemun.

4. *H. rivulatus* (Forsk.). — Kotor, Starigrad na otoku Hvaru, Rijeka (Ombla), Solin, Spljet, Skradin, Novigrad, Pećine (vrelo), Buk Krke.

Gen. Spermophora Hentz.

5. *S. senoculata* (Dugés). — Kotor, Starigrad o. H., Novigrad; Krk, Omišalj, Voz; Karlobag, Senj, Crkvenica, Bakar 28./V. 89. ♀ sa kok., 29./VII. sa kok. — Vide (29) p. 45.

Digitized by Google

Fam. Theridiidae.

Gen. Ariamnes Thor.

1. *A. nasicus* Sim. — Lokrum 31./VII. 94. ♂. — Brusje [24].

Gen. Episinus Latr.

2. *E. lugubris* Sim. — (truncatus O. Her.). — Omišalj, Malinska, Prevez (Raša); Senj, Novi, Bakar (više ♂ 15./VI.), Bakarac (♂ 24.VIII.), Draga, Martinjšćica ♂ 24./V. 89. — 30./V. 93. ♂, Rijeka 5./VI. ♂ ♀, Orehovica; Plitvice [25], Zagreb, Sljeme (zagrebačka gora).

3. *E. truncatus* Latr. — Otok Mljet (Goveđari), Hvar, Brusje [20]; Crkvenica, Bakar 6./VI. 93. ♂ ♀, Orehovica, Rijeka, Ratulje ♂ 2./VII. 93.; Košljun 17./VII. 94. ♂ ♀.

Gen. Argyrodes E. Sim.

4. *A. epeira* Sim. — Brusje (20).

Gen. Euriopis Menge.

5. *E. acuminata* Luc. — Budva, otok Mljet (Goveđari), Cavtat, Solin, Brusje [24]; Crkvenica, Kostrena Sv. L., Rijeka.

6. *E. flavomaculata* C. L. Koch. — Velebit, Gospić, Medak, Podsused [25].

7. *E. margaritata* (L. Koch). Dr. L. Koch: sub Theridium 1867. — Bakar ♀ ♂ 24./IV. i 4./VI., Kostrena ♂ u posljed. lil. 22./IV.

Gen. Theridium Walk.

8. *Th. herbigradum* Sim. — Solin; Krk, Omišalj ♂ 7./VI. 92.; Senj, Crkvenica, Bakar 22./V. 98., Škrljevo, Martinjšćica.

9. *Th. bimaculatum* (L) = reticulatum C. L. Koch. — Orehovica [25], Topusko.

10. *Th. nigrovariegatum* Sim. = Frivaldszky O. Her. — Krk, Omišalj, Glavotok; Velebit, Senj, Francikovac [25], Kraljevica ♂ 20./V. 90., Bakar ♀ ♂ 5./VI. 93., Bakarac, Kostrena Sv. L., Rijeka 16./VI. 93. ♂, Trnovica, Vrata, Jaska, Đakovo [25].

11. *Th. nineatum* Cl. (T. redimitum C. L. K.) — Brusje [24], Senj, Novi, Bakar ♂ ♀ 28./V. 90., Bakarac ♂ ♀ 18./VI. 92.; Krk, Punat, Glavotok, Omišalj, Prevez (Raša); Ratulje ♀ ♀ 2./VII. 93., Izvor Rječine, Velebit, Fužine, Plitvice [25], Zagreb, Đakovo, Ruma [25].

12. *Th. sisyphium* (Cl.). — Dalmacija [3]. — Fužine 21./VIII. 89. ♂, Vrata, Mrzla vodica, Crnilug 21./VIII. 89. ♀, Risnjak, Plitvice [25].

Digitized by Google

13. *Th. impressum* L. Koch. — Senj, Francikovac, Velebit [25], Kraljevica, Bakar, Bakarac, Kostrena, Rijeka, Fužine.

14. *Th. pinastri* L. Koch. — Košljun, Novi, Kraljevica, Bakar, Rijeka, Orehovica.

15. *Th. varians* Hahn. — Plitvice [25], Ogulin, Topusko, Đakovo, Vrdnik, Ruma [25], Zemun.

16. *Th. pictum* (Walk.). — Osijek [25].

17. *Th. tinctum* (Walk.). — Brusje [24], Bakar 18./IV. 91., Fužine, Vrata, Plitvice, Leskovac, Jasenak, Božjakovina, Đakovo, Vrdnik [25].

18. *Th. denticulatum* (Walk.). — Cavtat, Starigrad o. H., Krk, Lunte, Košljun, Sv. Ivan, Malinska, Bakar 6./V. 89. ♂. — 2./VI. 90. ♂, 24./X. 91. ♂ — i 2./IV. 91. ♂, Draga, Rijeka, Trnovica, Ogulin, Jasenak, Jaska, Sljeme (zag. g.), Pazua st., Osijek, Zemun.

19. *Th. simile* C. L. Koch. — Kotor, Muo, Dobrota; Krk, Lunte, Punat, Košljun, Omišalj, Malinska, Prevez (Raša); Bakar 10./V. 90. — kokon 30./V., Bakarac, Križišće, Rijeka, Fužine, Ogulin, Đakovo [25],

20. *Th. riparium* Black. — Osijek.

21. *Th. formosum* (Cl). = Th. lunatum C. L. Koch. — Muo (Kotor), Zadar; Košljun, Glavotok; Crkvenica, Kraljevica, Bakar ♀ ♂ 2./VII., Rijeka, Izv. Rječine (Kalić) ♀ ♂ 2./VII. 93., Fužine, Ogulin, Zagreb, Đakovo [25].

22. *Th. tepidariorum* C. L. Koch. — Kraljevica, Bakar 25./V. 91. ♀, Jaska, Osijek [25], Zemun.

23. *Th. aulicum* C. L. Koch. — Brusje [24], Starigrad o. H., Vis, Mljet (Goveđari), Cavtat; Omišalj, Crkvenica ♀ ♂ sa kokonom 11./VIII. 99.

24. *Th. pulchellum* (Walck.). — Brusje [24], Vis, Starigrad ot. Hvar, Mljet (Goveđari), Košljun, Glavotok; Bakar 15./V. 90. — 12./IV. 92., Crkvenica 2./VIII. 99. ♀, Ogulin.

25. *Th. vittatum* C. L. Koch. — Podsused, Jaska [25]. Varaždi. Toplice.

Gen. Ulesanis L. Koch.

26. *U. paradoxa* Lucas. — Rijeka [25]. Vide (28) p. 322. sub *Oroodes*.

Gen. Plocamis Sim.

27. *P. cavernicola* Kulcz. — Bakar 4./V. 92. ispod velika kamena ♀, Škabac, špilja k. Križišća 16./VIII. 93. ♂ ♀.

Digitized by Google

Gen. Dipoena Thor.

28. *D. melanogaster* (C. L. Koch). — Velebit [25], Senj, Novi, Bakar 1./VI. 90., Martinjšćica, Ratulje, Zagreb, Đakovo, Vrdnik [25].

29. *D. tristis* (Hahn). — (Ova i slijed. Chyz.-Kulcz. [25] pod Lasaeola). — Brusje [24], Buk Krke, Zadar, Velebit [25].

30. *D. braccata* (C. L. Koch). — Bakar, Plitvice, Đakovo [25].

31. *D. croatica* Chyz. — Omišalj, Crkvenica, Bakar. — Vide (28) p. 329.

32. *D. inornata* (Cambr.). — Senj, Crkvenica, Sv. Jelena, Bakar, Kostrena.

33. *D. nigroreticulata* Sim. — Đakovo [25].

34. *D. nigrina* Sim. — Crkvenica, Bakar, Jarčina (Draga) 10./VIII. 84. ♂, Martinjšćica, Plitvice [25].

35. *D. convexa* (Black). — Kotor, Senj, Novi, Crkvenica, Sv. Jelena, Bakar ♂ IV., Sv. Kuzma, Meja ♀ ♂ 14./VIII., Kostrena Sv. L., Martinjšćica.

Gen. Lathrodectus Walck.

36. *L. tredecim guttatus* (Rossi) [32]. — Fortis ga spominje pod „Malmignatto“ u svojoj knjizi Viaggio in Dalmazia 1774.; Brusje, o. Šolta (20), Biograd n. m. [31 i 40]; otok Krčki nad Vozom, Omišalj, Kornić [32]; Senj [25], Bakar ♀ 1./VIII. 89. a 5 kok. 20./VI. 93., Lukovo 9./VII. 99.

Gen. Crustulina Menge.

37. *C. scrabipes* Sim. — Buk Krke, Lukovo ♂ ♀ 9./VII. 99. — Senj ♀ ♂ 6./VII. 99., Novi, Povile, Crkvenica, Bakar, Martinjšćica.

38. *C. guttata* (Wid). — Novigrad; Velebit [25], Krk, Malinska, Voz; Povile, Kraljevica 31./VII. 99. ♂, Bakar, Bakarac 11./VII. ♀ ♂, Sv. Kuzma, Meja, Orehovica.

Gen. Steatoda (Sund).

39. *St. bipunctata* (L). = Phrurolithus ornatus C. L. Koch. — Mrzla vodica, Risnjak, Ogulin 19./VI. 96. Jaska, Topusko, Križevci, Pazua st., Osijek, Zemun.

Gen. Teutana Sim.

40. *T. castanea* Cl. — Bakar 15./VII. 92., Ogulin, Jaska, Topusko, Osijek, Zemun.

41. *T. grossa* C. L. Koch. — Brusje [24], Spljet, Zadar, Krk, Omišalj, Voz; Bakar 15./IX. ♂

42. *T. triangulosa* Walck. — Hvar, Brusje [24], Spljet, Šibenik, Zadar; Krk, Omišalj, Voz; Starigrad p. V., Jablanac, Lukovo,

Digitized by Google

Sv. Juraj, Senj, Novi, Kraljevica, Bakar 15./V. kok. — 23./VI. 93. ♂, Rijeka, Grob. polje, Jelenje, Jasenak [25], Jaska [25], Zagreb, Topusko, Đakovo [25], St. Pazua [25], Osijek, Zemun.

Gen. Lithyphantes Thor.

43. *L. corollatus* (L). — Francikovac 5./VII. 91. [25], Crkvenica.

44. *L. Paykullianus* (Walck.). — Budva, Kotor, Starigrad o. H., Spljet; Krk, Kornić, Senj, Rijeka, Orehovica [25]. Fužine.

Gen. Asagena Sund.

45. *A. phalerata* (Pauz.). — Brusje [20], Senj, Bakar ♀ 11. VII. Bakarac ♂ 11./VI. 92; Krk: Sv. Ivan; Fužine 22./VIII. 89., Osijek.

Gen. Enoplognatha Pavesi.

46. *E. mandibularis* (Luc.). — Spljet [24].

47. *E. thoracica* (Hahn). — Bakar; Đakovo, Vrdnik [25].

Gen. Pedanostethus Sim.

48. *P. lividus* (Black). — Velebit [25], Bakar, Risnjak.

Fam. **Argiopidae.**

Subfam. **Linyphinae.**

Erigoneae.

Gen. Ceratinella Emerton.

1. *C. brevis* (Wid). — Zagreb (Ar. Hung. II. 137).

Gen. Brachycentrum Dahl.

2. *B. elongatum* (Wid). — Bakar (Ar. Hung. II. 116 i 324), Rijeka.

3. *B. parallelum* (Wid). — Novi (ot. s. Marin), Rijeka [25].

4. *B. medusa* (Sim). — Bakar 14./IX. ♀ ♂.

Gen. Trichopterna Kulcz.

5. *T. Blackwallii* (Cam.) — Bakar [25].

Gen. Cnephalocotes Sim.

6. *C. silus* (Cam.). — Rijeka [25].

Gen. Diplocephalus Bertk.

7. *D. cristatus* (Blackw.) — Đakovo [25].

8. *D. connectus* (Kulcz.) — Orehovica [25].

9. *D. humilis* (Blackw.) — Bakar; Đakovo, Ruma [25].

10. *D. picinus* (Blackw.) — Gospić, Velebit (Vaganski vrh) [25].

Digitized by Google

Gen. Tapinocyba (Sim.)

11. *T. Beckii* (Cambr.). — Risnjak [25].
12. *T. insecta* (L. Koch). — Đakovo [25].
13. *T. pallens* (Cambr.). — Velebit [25].

Gen. Metopobactrus Sim.

14. *M. Rayi* (Sim). — Bakar.

Gen. Entelecara Sim.

15. *E. acuminata* (Wid.). — Đakovo, Ruma [25].

Gen. Maebelia (Dahl.)

16. *M. penicillata* (Westr.). — Velebit, Đakovo [25], Fauna Reg. Hung.

Gen. Dicymbium Menge.

17. *D. nigrum* (Blackw.). — Lipik, Đakovo [25].

Gen. Gonatium Menge.

18. *G. isabellinum* (C. L. Koch.). — Mrzla vodica.
19. *G. hilare* (Thor.). — Karlobag, Crkvenica; Omišalj; Rijeka.
20. *G. corallipes* (Cambr.). -- Rijeka, Medak [25].

Gen Hypomma Dahl.

21. *H. bituberculatum* (Wid.). — Osijek [25].

Gen. Dicyphus Menge.

22. *D. cornutus* (Blackw.). — Đakovo [25].

Gen. Dismodicus Sim.

23. *D. elevatus* (C. L. Koch). — Plitvice, Vrdnik [25].

Gen. Trichoncus Sim.

24. *T. scrofa* Sim. — Crkvenica.
25. *T. sordidus* Sim. — Novi, Bakar, Meja.
26. *T. affinis* Kulcz. — Novi, Crkvenica, Bakar 24./X., Martinjščica, Rijeka, Vrdnik [25].

Gen. Gongylidium Menge.

27. *G. rufipes* (L). — Osijek [25].

Gen. Kulczyńskiellum F. O. P. Cambr.

28. *K. retusum* Westr. (Nerine Blackw.). — Mrzla vodica, Osijek [25].
29. *K. agreste* (Blackw.). — Mrzla vodica, Ruma [25].

Digitized by Google

Gen. Trachygnatha Kulcz.

30. *T. dentata* (Wid.). — Đakovo [25].

Gen. Erigone Aud.

31. *E. dentipalpis* (Wid.). — Krk: Omišalj, Voz; Senj, Francikovac [25], Crkvenica, Bakar ♂ ♀ 5./V., Plitvice, Đakovo [25].

32. *E. vagans* Aud. — Dalmacija [3], Omišalj, Glavotok, Crkvenica, Bakar, Rijeka, Orehovica, Plitvice, Đakovo [25], Osijek.

Gen. Maso Sim.

33. *M. Sundevalii* Westr. — Viševica, Gospić [25].

Gen. Nematogmus Sim.

34. *N. sanguinolentus* Walck. — Vratnik [25], Bakar.

Fam. **Formicineae.**

Gen. Formicina Canest.

35. *F. mutinensis* Canest. — Kotor, Arbanasi; Omišalj, Glavotok; Bakar 3./VI. i 19./IX. ♀ ♂, Orehovica.

var. pallida Canest. — Bakar, Martinjšćica, Draga (Jarčina).

Fam. **Linyphieae.**

Gen. Porrhomma (Sim.).

36. *P. microphthalmum* (Cambr.). — Đakovo (25. pag. II. 76 i 322).

Gen. Centromerus Dahl.

37. *C. similis* (Kulcz.). — Bakar IV./90. [25 i 28].

38. *C. silvicola* (Kulcz.). — Risnjak.

Gen. Microneta Menge.

39. *M. viaria* (Blackw.). — Zagreb [25].

Gen. Micryphantes (C. L. Koch).

40. *M. corniger* (Blackw.). — Velebit [25].

41. *M. retroversus* (Cambr.). — Bakar.

42. *M. rurestris* (L. Koch). — Senj, Francikovac, Crkvenica, Plitvice, Đakovo [25].

43. *M. fuscipalpis* C. L. Koch. — Đakovo [25].

Gen. Bathyphantes Menge.

44. *B. concolor* (Wid.). — Bakar, Orehovica, Velebit, Mrzla vodica, Đakovo [25].

45. *B. dorsalis* (Wid.). — Osijek (Ar. H. II. 321).

Digitized by Google

46. *B. nigrinus* (Westr.). — Lipik (ibid.).

47. *B. gracilis* (Blackw.). — Đakovo, Osijek (ib. 74 i 321).

Gen. Lephthyphantes Menge.

48. *L. nebulosus* (Sund.). — Linyph. circumflexa C. K. 1845. — Topusko.

49. *L. minutus* (Blackw.). — Mrzla vodica 11./VIII. ♀ (25).

50. *L. leprosus* (Ohlert). — Jasenak, Mosunje, Jaska [25].

51. *L. alacris* (Blackw.). — Vrata ♀♂ 26./VI., Mosunje, Risnjak [25].

52. *L. crucifer* (Menge) — Ruma [25].

53. *cristatus* (Menge). — Bakar, Mrzla vodica.

54. *L. tenebricola* (Wid.). — Vrata, Mrzla vodica, Kukljić, Risnjak [25].

55. *L. tenuis* (Blackw.) — Senj, Francikovac, Orehovica, Vrata, Plitvice, Vrdnik [25].

56. *L. flavipes* (Blackw. 1854.) = Henricae (Six.), (A. H. II. 320). Francikovac, Vrata, Plitvice, Vrdnik, Ruma.

57. *L. Keyserlingii* (Auss.) — Bakar.

58. *L. notabilis* Kulcz. 1887. — Crkvenica, Martinjšćica (id. II. 321).

Gen. Drapetisca Menge.

59. *D. socialis* Sund. — Mrzla vodica 12./VIII. ♂ [25 i 28].

Gen. Taranucnus Sim.

60. *T. croaticus* Chyzer. — Vrata (Fužine) [25].

Gen. Labulla Sim.

61. *L. thoracica* (Wid.). — Vratnik, Vrata, Mrzla vodica [25],

Gen. Linyphia Latr.

62. *L. montana* (Cl.). — Velebit [25], Osijek.

64. *L. triangularis* (Cl.). — Muo (Boka kot.), Polača, Vis, Starigrad o. H., Cavtat, Šibenik, Zadar, Novigrad; Omišalj, Košljun, Prevez (Raša); Novi, Crkvenica, Kraljevica, Križišće, Bakar, Draga, Kostrena, Martinjšćica, Rijeka 27./VIII. ♀ ♂, Trsat, Ratulje, Orehovica, Fužine 22./VIII. 89. ♂ ♀, Mrzla vodica, Otočac, Plitvice, Varaždi. toplice, Topusko, Zagreb IX. ♀ ♂; Đakovo, Ruma (25), Osijek.

64. *L. emphana* Walck. — Crnilug 11./VIII. 88., Mrzla vodica, Risnjak [25].

65. *L. marginata* C. L. Koch. — Plitvice [25], Ogulin, Zagreb, Đakovo [25].

Digitized by Google

66. *L. peltata* Wid. — Breze [25], Crni lug 21./VIII. 89., Vrata, Jasenak, Leskovac, Zagreb Zagreb. gora.

67. *L. frutetorum* C. L. Koch. — Kotor, Polača, Hvar, Starigrad, Brusje [24], Spljet, Skradin, Buk Krke, Novigrad; Punat, Kornić, Malinska, Polje (k. Dobrinja); Senj, Novi 15./IV. ♂, Crkvenica, Bakarac, Bakar, Meja, Kostrena, Rijeka, Plitvice [25], Ogulin, Jasenak, Zagreb, Zagr. gora, Đakovo [25].

var. *punctiventris* Kulcz. — Buk Krke, Skradin, Novigrad; Punat, Kornić; Senj, Vratnik. Novi, Crkvenica, Bakarac, Bakar, Draga (Jarčina), Meja 14./VIII. 89. ♂ ♀, Đakovo [25].

68. *L. hortensis* Sund. — Bakar 12./III. 93., Đakovo [25].

69. *L. pusilla* Sund. — Bakar 22./III. 93. ♂, Đakovo [25].

70. *L. impigra* Cambr. — Osijek [25].

71. *L. clathrata* Sund. — Velebit, Đakovo [25].

72. *L. furtiva* Cambr. — Dalmacija [24]. Cambridge 1871. Trans. Linn. Soc. p. 425. LV.

Gen. Stemonyphantes Menge.

73. *St. bucculentus* (Cl.) — Velebit [25], Crkvenica.

Gen. Tapinopa Westr.

74. *T. longidens* (Wid.). — Linyphia Westr. 1861. — Dalmacija [3].

Subfam. **Tetragnathinae.**

Pachygnatheae.

Gen. Pachygnatha Sund.

75. *P. Clerckii* Sund. — Dalmacija (3. Carr.). Westr. 1861. sub Linph. maxillosa), Osijek.

76. *P. De Geerii* Sund. — Bakar 29./V., Orehovica, Velebit, Mrzla vodica [25], Zagreb, Osijek.

Tetragnatheae.

Gen. Tetragnatha Latr.

77. *T. extensa* (L). — Buk Krke, Vrana, Vrbica, Novigrad; Novi, Crkvenica, Rijeka, Martinjšćica, Draga (Jarčina), Vrelo Rječine 22./V. 90. ♂; Trnovica, Topusko, Zagreb, Osijek, Zemun.

78. *T. pinicola* L. Koch. — Draga gornja, Rijeka, Bitoraj 26./VI. 92., Plitvice, Zagreb, Osijek (25).

79. *T. nigrita* Lendl. — Bakar 10./V. 90; Vrdnik [25].

80. *T. Solandrii* (Scop.). — Kotor, Buk Krke, Vrbica, Vrana, Izvor Rječine, Ogulin, Zagreb, Božjakovina, Đakovo [25].

Digitized by Google

81. *T. obtusa* C. L. Koch. — Vrana; Sušak, Fužine 9./IX. 97. ♂, Mrzla vodica, Leskovac, Zagreb, Zagreb. gora, Đakovo [25].
forma *intermedia* Kulcz. — Osijek [25].

Gen. Eucta Sim.

82. *E. lutescens* Lendl. — Osijek [25].

Meteae.

Gen. Meta C. L. Koch.

83. *M. segmentata* (Cl.). — Senj, Novi ♀ ♂ 15./IV. 97., Bakar 29./IV. 90. ♀ ♂, Rječina (Kalić vrelo), Fužine 9./IX. 97., Mrzla vodica. Risnjak, Brlog, Plitvice, Zagreb, Sljeme, Kraljičin zdenac, Podsused, Topusko, Varaž. toplice, Križevci.
var. *Mengei* Thor. — Bakar 19./V. 89. ♂, Breze, Zagreb, Đakovo, Osijek [25].

84. *M. Meriane* (Scop.). — Pećine (vrelo); Omišalj, Voz; Bakar 6./V. 92. ♂., Križišće ♂ ♀ 16./VIII., Draga, Martinjšćica, Orehovica, Risnjak.

85. *M. Menardi* (Latr.). — Konjsko, Pazarište (Milinković pećina) [25].

Subfam. **Argiopinae.**

Gen. Argiope Sav.

86. *A. Bruenichii* (Scop.). — Budva, Kotor, Tajer, Spljet, Solin, Brusje [24], Buk Krke, Arbanasi, Zadar, Vrbica ♂ 22./VII., Vrana; Krk, Omišalj; Senj, Crkvenica, Badanj, Bribir, Bakarac 25./IX. 94. cocon), Bakar [33] 2./VIII. cop. 24./VIII. cocon, Draga, Rijeka, Zagreb, Đakovo [21].

87. *A. lobata* (Pall). — Budva, Spljet, Brusje [24], Senj. Fruška gora [25].

Gen. Glyptogona Sim.

88. *G. 6-tuberculata* (Keys.). — Budva; Dalmacija (vidi 7 sub *Epeira*).

Gen. Cyclosa Menge.

89. *C. conica* (Pall). — Kotor; Brusje [24], Šibenik, Krk: Punat, Košljun, Sv. Lucija, Omišalj; Senj, Vratnik, Grižane, Crni lug, Mrzla vodica, Zagreb, Zagr. gora, Topusko, Osijek.

Gen. Mangora O. Cambr.

90. *M. acalypha* (Walck.) = Epeira a. — Budva, Kotor, Muo, Spljet, Brusje [24[, Arbanasi, Zadar; Punat, Košljun, Sv. Lucija,

Digitized by Google

Omišalj; Velebit, Senj, Francikovac, Vratnik [25], Vinodol, Novi, Grižane, Križišće, Bakarac, Bakar, Martinjšćica, Kostrena, Rijeka, Sušak, Orehovica, Ratulje, Grob. polje, Žuta lokva, Zagreb, Lipik, Đakovo, Osijek.

Gen. Epeira Walck.

91. *E. angulata* (Cl.). — Spljet, Velebit, Breze, Ogulin, Topusko ♂ VIII. 91., Đakovo [25].

92. *E. grossa* C. L. Koch. — Senj, Francikovac, Bribir, Crkvenica, Bakar 10./VI. 89., 15./VI. 93. ♀, 29./VI. 900. ♀, Kostrena L., Rijeka, Žuta lokva, Otočac [25].

93. *E. Circe* Sav. — Kotor, Muo, Spljet, Pećine (vrelo), Vrana, Vis; Krk, Košljun, Sv. Lucija, Kornić, Glavotok, Omišalj, Voz, Prevez (Raša); Velebit, Karlobag, Jablanac, Starigrad, Lukovo, Sv. Juraj (Borova draga), Senj, Vinodol, Crkvenica, Sv. Jelena, Grižane, Križišće, Bakarac, Bakar coc. 28./VI. 92. — ♂ od VIII. Meja, Kostrena, Martinjšćica, Rijeka, Trsat, Orehovica, Trnovica; Podsused, Plitvice [25].

94. *E. dromedaria* (Walck.). — Kotor, Spljet, Solin; Krk, Punat, Košljun, Kornić, Glavotok, Omišalj, Voz; Novi, Bakar 28./IV. 90. ♂, Rijeka, Otočac, Zagreb; Đakovo [25].

95. *E. omoeda* Thor. — Breze, Vrata [25].

96. *E. gibbosa* (Walck). E. arbustorum C. L. K. — Brusje [24], Fužine, Crnilug, Varaždt. toplice (Dolesch.), Zagreb.

97. *E. dalmatica* Dol. — Kotor, Polača, Vis, Hvar, Omiš, Solin, Brusje [24], Tajer, Zadar, Vrbica; Omišalj ♂ 7./VI. 92., Sv. Lucija; Jablanac, Senj, Novi, Crkvenica, Sv. Jelena, Bakar 8./VI. 89. ♂.

98. *E. diadema* (Cl.). — Brusje [24], Šibenik, Zadar, Jablanac, Velebit, Senj, Vratnik, Francikovac [25], Crkvenica, Bribir, Bakar ♂ 4./IX., Bakarac, Meja ♂ ♀ 2./VII. 93., Kostrena, Martinjšćica; Lošinj, Krk, Omišalj; Rijeka, Prevez (Raša), Trsat, Orehovica, Ratulje ♂ 9./IX. 97., Fužine, Mrzla vodica, Risnjak, Plitvice [25], Ogulin, Zagreb, Zagrebačka gora, Kraljičin zdenac ♀ ♂ 2./IX. 94., Đakovo [25], Osijek.

99. *E. marmorea* (Cl.). — a) forma principalis Thor. Sušak; b) forma pyramidata (Cl.), Mrzla vodica [?], Plitvice [25], Osijek.

100. *E. alsine* (Walck.). — Topusko, Osijek.

101. *E. quadrata* (Cl.). — Velebit [25], Zagreb.

102. *E. cucurbitina* (Cl.). — Dalmacija [3], Krk, Velebit [25], Senj, Vinodol, Novi, Bribir, Crkvenica, Bakar, Trnovica, Leskovac,

Digitized by Google

Bitoraj, Risnjak, Mrzla vodica, Fužine, Topusko, Zagreb, Zagrebačka gora, Lipik.

103. *E. alpica* C. L. Koch. — Velebit, Vratnik, Breze, Bitoraj Crni lug, Mrzla vodica, Ogulin, Zagreb. gora, Zemun.

104. *E. Sturmii* Hahn. — Sv. Filip i Jakov, Vrbica, Dalmacija (Dolesch.); Breze, Bakar [?], Fužina, Bitoraj 26./VI. 92., Crni lug, Risnjak, Ogulin, Osijek.

105. *E. triguttata* (Fabr.). — Podsused, Plitvice [25].

106. *E. Redii* (Scop.). — Hvar, Spljet, Brusje [24], Vrbica; Omišalj; Vratnik, Novi, Crkvenica, Bakar 10. i 30./V. 90. ♀ ♂, Martinjšćica, Rijeka, Zagreb, Stenjevac, Đakovo [25], Zemun.

107. *E. ceropegia* (Walck.). — Brusje [24], Doleschal o. c. 1852.: Croatien.

108. *E. Victoria* Thor. — Dalmacija u Thorell Remark p. 552.

109. *E. Armida* Sav. — Senj [25].

110. *E. umbratica* (Cl.). — Dalmacija [3]; Krk, Omišalj; Senj, Bakar 30./IV. 91. ♂, Kostrena L., Martinjšćica, Sušak, Fužine, Plitvice [25], Ogulin, Topusko, Zagreb, Križevci, Osijek, Zemun.

111. *E. ixobola* Thor. — Križevci, Osijek, Zemun.

112. *E. cornuta* (Cl.). — Buk Krke, Vrana, Vrbica; Leskovac, Plitvice, Lipik [25], Zagreb, Osijek.

113. *E. vulpina* Walck. — Dalmacija (Carrara l. c. 3).

114. *E. patagiata* (Cl.). — Velebit, Otočac, Fužine, Plitvice [25], Zagreb.

115. *E. adianta* (Walck.). — Kotor, Muo, Vrana (Han), Zadar; Omišalj, Voz; Senj, Francikovac, Kriviput [25], Vinodol, Novi, Bribir, Selce, Crkvenica, Bakarac, Bakar 14./VII ♀ ♂, Kostrena, Sv. Kuzma, Rijeka, Trnovica, Ratulje.

116. *E. diodia* (Walck.). Budva; Košljun, Kornić, Prevez (Raša); Senj, Novi, Grižane 14./IV. 97. ♂, Bakar 29./IV. 90. ♂, Martinjšćica, Rijeka.

117. *E. Herii* (Hahn). — Cavtat, Vrana; Punat; Božjakovina, Đakovo [25], Osijek.

118. *E. sanguinea* C. L. Koch, (Singa). — Spljet [24], Bakar 11./IX. 90., Varaždt. toplice [25].

119. *E. prominens* (Westr.), (Cercidia). — Senj, Bakar 16. V. ♂ — 23./V. i 6./VI. cocon, Zagreb.

120. *E. atrica* (C. L. Koch). non Zilla. — Brusje [24], Zadar, Novigrad; Košljun, Senj, Plitvice [21].

121. *E. Stroemii* Thor. non Zilla. — Vrdnik [25], Osijek.

Digitized by Google

122. *E. Keyserlingii* (Auss.) non Zilla. — Budva, Lokrum, Vis grad, Starigrad, Brusje [24], Mljet (Goveđari), Omiš, Skradin; Karlobag, Jablanac, Lukovo, Borova draga (k. sv. Jurja), Senj, Novi, Crkvenica, S. Jelena, Bakar, Rijeka, Trsat.

Gen. Peniza Auss.

123. *P. europea* (Auss.) (Neue Radsp. 16). — Brusje [24].

Gen. Singa C. L. Koch.

124. *S. hamata* (Cl.). — Velebit [25], Božjakovina, Topusko, Lipik, Đakovo [25], Osijek.

125. *S. nitidula* C. L. Koch — Podsused, Stenjevac [25], Zagreb, Zemun.

126. *S. pygmaea* (Sund.). — Lipik [25].

Gen. Zilla C. L. Koch.

127. *Z. montana* C. L. Koch. — Topusko.

128. *Z. x-notata* (Cl.). — Budva, Kotor, Muo, Vis, Hvar, Starigrad, Polača, Cavtat, Tajer, Spljet, Solin, Buk Krke, Šibenik, Vrbica, Pećina (vrelo), Sv. Filip i Jakov, Arbanasi, Zadar, Novigrad; Krk, Punat, Kornić, Košljun, Glavotok, Malinska, Omišalj, Prevez (Raša); Karlobag, Jablanac, Starigrad, Sv. Juraj, Senj, Crkvenica, Križišće, Bakar, Martinjšćica.

129. *Z. Thorelii* Auss.. (Neue Radsp. 20). — Ogulin 19./VI. 96.

Fam. **Mimetidae.**

Gen. Ero C. L. Koch.

1. *E. furcata* Will. — Bakar 29./IV. ♂, Mrzla vodica 12./VIII. ♂.

2. *E. aphana* (Walck.) — Glavotok, Crkvenica, Bakar 13./V. 90. ♂, Orehovica, Izvor Rječine 2./VII. 93. ♂, Zagreb, Đakovo [25], Osijek, Zemun.

3. *E. tuberculata* (De Geer). — Bakar 17./VII. 90., Omišalj; Podsused [25].

Gen. Mimetus Hentz.

4. *M. laevigata* (Keyser.) sub Ero, Beschreib. n. Sp.: Dalmacija [7], Kotor, Polača, Brusje [24], Buk Krke; Omišalj, Košljun Prevez (Raša); Novi 5./VII. 92. ♀ ♂, Selce, Crkvenica, Bakar ♀ ♂ 12./IV. 91., 3./VI. 99. ♂, 17./VII. ♂, 3. i 4.VI. 1900. ♂, Izvor Rječine, Zemun.

Digitized by Google

Fam. **Thomisidae.**

Gen. Tmarus Sim.

1. *T. piger* (Walck.). — Muo (Kotor), otok Hvar [39], Vrbica, Velebit; Omišalj, Voz; Vinodol, Crkvenica, Bakar ♂ ♀ 29./VIII. 89., Rijeka, Ratulje, Topusko, Podsused, Zagreb, Božjakovina, Varaždt. toplice, Lipik [25], Osijek.

2. *T. stellio* E. Sim. (Monaesas cuneolus O. Her. v. 21). — Novi.

Gen. Coriarachne Thor.

3. *C. depressa* (C. L. Koch). — Bakar 4./V. 92., Cavtat.

Gen. Thomisus Walck.

4. *Th. albus* (Gmel.). (= onustus Walck.). — Budva, Kotor, Vis, otok Hvar [39], Starigrad, Vrana, Spljet, Solin, Buk Krke; Košljun, Omišalj; Jablanac, Borova draga (Sv. Juraj), Senj. Crkvenica, Bakar ♂ 26. V. — ♀ 16./VI., Martinjšćica, Rijeka, Zagreb, Križevci, Zemun.

Gen. Runcinia Sim.

5. *R. lateralis* (C. L. Koch). — Kotor, Muo, Vis, Starigrad, Cavtat, Spljet, Solin, Brusje [24], Buk Krke, Zadar; Omišalj, Punat; Lukovo, Senj, Borova draga (S. Juraj), Senj, Novi, Crkvenica, Bakarac, Bakar ♂ 29./V. 99., Kostrena, Draga, Rijeka, Topusko, Zagreb, Vrdnik [25], Osijek ♂ 30./IX. 93.

Gen. Pistius Sim.

6. *P. truncatus* Pall. — Dalmacija [3], otok Hvar [39], Kotor, Vis grad; Borova draga (Sv. Juraj) 8./VII. 99. ♂, Velebit [25]; Omišalj; Vinodol, Novi, Crkvenica, Bakarac, Bakar ♂ 15. VII., Sv. Kuzma, Rijeka, Žuta lokva, Plitvice [25], Topusko, Zagreb, Zagreb. gora, Varaždt. toplice, Đakovo [25].

Gen. Misumena Latr.

7. *M. vatia* (Cl.) = Thomis. citreus Walck. — Vrana; Velebit [25], Povile, Bakar ♀ 13./V. 88., Rijeka, Velebit, Lipik, Risnjak, Plitvice, Podsused, Varaždt. toplice, Đakovo, Pazua st. [25], Osijek.

8. *M. tricuspidata* (Fabr.). — Vrana, Vrbica, Buk Krke, Skradin, Dalmacija [3]; Topusko, Podsused, Zagreb, Varaždt. toplice, Križevci, Lipik, Đakovo [25], Osijek, Zemun.

Digitized by Google

Gen. Heriaeus Sim.

9. *H. Savigny* Sim. — Kotor, Cavtat, Vis, Brusje [24], Zadar; Omišalj; Senj, Bribir, Bakar ♀ 14./VII. 88., Martinjšćica, Rijeka, Đakovo, Osijek [25].

10. *H. setiger* Cambr. — Brusje [24].

11. *H. hirsutus* (Walck.). — Kotor, Muo, Cavtat, Tajer, Zadar, o. Hvar [39], Dalmacija (Carr. 3. sub Thom. villosus); Jablanac, Senj, Zagreb, Ruma [26].

Gen. Diaea Thor.

12. *D. dorsata* (Fabr.). — Dalmacija (Carr. sub Thom. floricolens, 3), Kotor, Polača, Vis gr., Starigrad o. H., Solin, Arbanasi; Omišalj, Košljun; Crkvenica, Bakar, Leskovac, Jasenak [25].

Gen. Oxyptila Sim.

13. *O. horticola* C. L. Koch. — Spljet, Šibenik, Velebit [25], Omišalj; Bakar, Martinjšćica, Rijeka, Varaž. toplice.

14. *O. confluens* (C. L. Koch). — Spljet [24], Bakar 1./IX. ♀; [25].

15. *O. trux* (Blackw.). — Vrata, Viševica, Risnjak [25].

16. *O. rauda* Sim. (obsoleta Kulcz.). — Bakar, Rijeka [25].

17. *O. scabricula* (Westr.). — Velebit, Krivi put [25].

18. *O. nigrita* (Thor.). — Đakovo [25], Senj.

19. *O. Blackwalli* Sim. — Crkvenica, Bakar, Kostrena Sv. L., Lipik [25].

20. *O. praticola* (C. L. Koch). — Dalmacija (3. sub Thom. brevipes, Xysticus b. Hahn), Velebit [25], Krk (Sv. Lucija); Bakar, Martinjšćica, Draga, Đakovo [25].

21. *O. simplex* (Cambr.). — Lipik [25].

22. *O. albipes* Sim. — Spljet [24].

Gen. Xysticus (C. L. Koch).

23. *X. bifasciatus* (C. L. K.). — Vrdnik [25].

24. *X. Kochii* Thor. — Spljet, Starigrad, Brusje [24], Buk Krke; Omišalj; Senj, Bakar ♂ 31./V. 92., Rijeka, Orehovica, Ratulje, Zagreb, Lipik, Đakovo, Osijek [25].

25. *X. comptulus* Sim. — Spljet [24], Novigrad; Krk (Sv. Duh); Senj, Crkvenica, Kraljevica [25].

26. *X. cristatus* (Cl.). — Spljet [24], Velebit, Risnjak.

27. *X. pini* (Hahn). — Vrata, Fužine, Zagreb, Osijek, Zemun.

28. *X. lateralis* (Hahn). — Kotor, Spljet, Zadar, Vrbica, Novigrad, Velebit; [25], Košljun; Bakar, Trnovica, Mrzla vodica, Ogulin, Topusko, Plitvice, Zagreb, Osijek, Zemun.

Digitized by Google

29. *X. ulmi* (Hahn). — Podsused, Zagreb, Božjakovina, Križevci, Lipik [25], Osijek.

30. *X. sabulosus* (Hahn). — Rijeka [6].

31. *X. Ninii* Thor. — Vis, Buk Krke; Omišalj; Jablanac, Senj. Francikovac [25], Kraljevica, Bakar, Meja, Rijeka, Vrdnik [25].

32. *X. striatipes* L. Koch. — Spljet [24], Vis, Vrana; Senj, Križišće, Osijek.

33. *X. acerbus* L. Koch. — Budva, Muo, Vis, Trogir, Solin, Spljet, Buk Krke; Omišalj; Bakar ♂ 29./V. 93., Bakarac, Rijeka. Ratulje.

34. *X. luctuosus* (Blockw.) — Vrata, Viševica, Crni dabar [25].

35. *X. Kempelenii* Thor. (X. frater O. Her.). — Bakar, Orehovica, Đakovo [25].

36. *X. robustus* (Hahn). — Spljet, Solin, Šibenik, Starigrad o. H., Velebit; Lukovo, Bakar 29./V. 92. ♀.

37. *X graecus* C. L. Koch. — Kotor, Brusje [24], Starigrad; Krk (Sv. Duh); Lukovo, Borova draga (Sv. Juraj), Crkvenica, Selce, Bakar, Kostrena s. L., Rijeka.

Gen. Synaema Sim.

38. *S. globosum* (Fabr.). — Budva, Vrbica, Vrana, Novigrad; Omišalj; Bakar, Plitvice, Leskovac, Zagreb, Đakovo [25].

39. *S. ornatum* (Thor.). — Lokrum 31./VIII. 94. Cavtat, Omiš, Mljet, Vis, Starigrad o. H., Solin, Vrana, Vrbica, Buk Krke, Zagreb.

Gen. Philodromus (Walck)..

40. *Ph. dispar* Walck. — Polača (Mljet), Muo (Kotor), Buk; Krke; Košljun; Bakar ♂ 21./V. 90. — 7./VI. cop., 21./VI. coc.. Martinjšćica, Rijeka ♂ ♀ 5./VI. 97., Ratulje. Plitvice, Podsused.

41. *Ph. lividus* Sim. — Brusje [24].

42. *Ph. margaritatus* (Cl.). — Brusje [24]. Božjakovina, Đakovo [25], Bitoraj 26./VI. 92.. Osijek, Zemun.

43. *Ph. poecilus* Thor. — Hvar; Đakovo [25].

44. *Ph. emarginatus* (Schrank). — Lokrum (?), Leskovac, Plitvice, Đakovo [25].

45. *Ph. rufus* Walck. — Crkvenica, Bakar, Plitvice, Đakovo [25].

46. *Ph. bistigma* Sim. — Brusje [24].

47. *Ph. debelis* Sim. — Brusje [24].

48. *Ph. collinus* C. Koch. — Dalmacija [3], Senj, Fužine, Bitoraj 26./VI. 92., Mrzla vodica. Plitvice, Zagreb, Sljeme.

Digitized by Google

49. *Ph. cammarus* Rossi. — Dalmacija [3].

50. *Ph. aureolus* (Cl.). — Ph. verus. — Cavtat, o. Hvar [39], Brusje [20], Vrana; Omišalj, Punat, Prevez (Raša); Lukovo, Senj, Vinodol, Grižane, Križišće, Bakarac, Bakar.

var. *variegata* Kulcz. — Đakovo [25].

subsp. *caespiticola* (Walck.). — Crkvenica, Ogulin, Topusko, Đakovo, Osijek.

subsp. *similis* Kulcz. — Osijek [25].

subsp. *pallens* Kulcz. — Vis, Velebit, Senj, Povile, Crkvenica, S. Jelena, Bakar ♀ 17./VII. 92., Žuta lokva, Otočac [25], Zemun.

subsp. *rufolimbata* Kulcz. — Lukovo, Borova draga (Sv. Juraj), Senj, Vratnik [25], Bakarac, Križišće 12./VIII. 93., Bakar, Crni lug, Žuta lokva, Otočac [25], Zagreb.

subsp. *marmorata* Kulcz. — Bribir, Đakovo, Osijek [25].

Gen. Thanatus C. L. Koch.

51. *Th. formicinus* (Cl.). — Dalmacija (2.) sub. Phil. rombiferus, o. Hvar [39], Vratnik (?) [25].

52. *Th. arenarius* Thor. — Šibenik, Senj 6./VII. 99., Osijek.

53. *Th. vulgaris* Sim. — Senj ♀ ♂ 2./VII. 91., Bakarac, Bakar 13./VIII., Rijeka; Omišalj; Ratulje. — Vide (29) p. 93.

54. *Th. striatus* C. L. Koch. — Viševica, Osijek [25].

55. *Th. sabulosus* (Menge). — Viševica, Vrdnik [25].

Gen. Tibellus Sim.

56. *T. vittatus* (Thor.). — Vrana, Vrbica; Košljun; Senj, Novi, Kraljevica, Bakar ♂ 28./VI., Rijeka, Zagreb, Osijek, Zemun.

57. *T. parallelus* (C. L. Koch). — Vrana, Velebit [25], Božjakovina.

58. *T. oblongus* (Walck.). — Dalmacija (3) sub. Phil. ob.; Than. trilineatus kod Canest.-Pavesi [16], Šibenik, Rijeka, Bakar 29./VIII., Osijek.

59. *T. oblongiusculus* Luc. — Brusje [24].

Fam. **Clubionidae.**

Gen. Micrommata Latr.

1. *M. virescens* (Cl.). — Kotor, Spljet, o. Hvar [39], Arbanasi; Krk, Omišalj, Malinska; Senj, Bakarac, Bakar 19./V. ♂, cocon 20./VI., Sv. Kuzma, Martinjšćica 30./V. cop., Rijeka, Plitvice, Ogulin, Zagreb, Zagreb. gora, Varaždinske toplice, Đakovo.

Digitized by Google

2. *M. ornata* (Walck.). — Spljet [24]; Omišalj, Voz; Novi, Bribir, Grižane, Bakar, Plitvice, Ogulin, Podsused, Zagreb, Zagrebačka gora.

3. *M. ligurina* E. Sim. — Spljet [24], Krk (Kornić) ♂ 28./III. 93., vidi C. Koch Arach. XII. 89. fig. 1020. i Thor. Rem. 228. [18].

Gen. Olios (Walck.).

4. *O. spongitaris* (Duf.). — Kotor, Polača, Spljet, o. Hvar [39], Brusje [24], Starigrad; Omišalj, Voz, Prevez (Raša); Crkvenica, Bakar nos. ♀ 23./V. 93. — ♂ 25./VI. 91. — cocon VII. — 25./IX. 92. ♂ — zad. lilj. ♀ 31./VIII. 92., Krasica ♂ 10./IX., Rijeka.

Gen. Clubiona Latr.

5. *C. phragmitis* (C. L. Koch) (= holosericea Westr.). — Buk Krke; Vrana, Krk, Voz.

6. *C. germanica* Thor. — Velebit, Đakovo, Osijek [25].

7. *C. terestris* Westr. — Orehovica, Vrata.

8. *C. frutetorum* L. Koch. — Đakovo [25].

9. *C. neglecta* Cambr. (montana C. L. K.) — Velebit, Plitvice [21].

10. *C. similis* L. Koch. — Mrzla vodica, Lipik [25].

11. *C. cerulescens* L. Koch. — Crni dabar, Gospić, Đakovo [25].

12. *C. reclusa* Cambr. (C. grisea L. K. vide 13). — Dalmacija [16].

13. *C. pallidula* (Cl.). — Velebit, Mosunje, Đakovo, Osijek [25].

14. *C. trivialis* C. L. Koch. — Rijeka, Fužine, Mrzla vodica, Leskovac, Plitvice [25].

15. *C. corticalis* (Walck.). — Vrata, Crni lug.

16. *C. brevipes* Blackw. — Rijeka, Đakovo [25].

17. *C. decora* Blackw. — Risnjak [25].

18. *C, compta* C. L. Koch. — Vis, Brusje [24], Tajer, Arbanasi; Velebit, Medak [25], Bakar 29./IV. 91. ♂, Trnovica, Vrata, Leskovac, Zagreb, Križevci, Đakovo [25].

19. *C. subtilis* L. Koch (C. pallens Bl.). — Zagreb.

Gen. Chiracanthium C. L. Koch.

20. *Ch. Mildei* L. Koch. — Dalmacija [12], Starigrad o. H., Brusje [24], Spljet, Solin, Zadar; Punat, Voz; Senj, Crkvenica, Selce, Bakar, Martinjšćica.

21. *Ch. punctorium* (Villers) = italicum Can. et Pav. [16], O. Herman 1879. = nutrix L. Koch. — Bakar, Orehovica [25].

22. *Ch. elegans* Thor. — Velebit, Rijeka, Đakovo [25].

Digitized by Google

23. *Ch Seidlitzii* L. Koch. — Spljet [20], Crkvenica [25].

24. *Ch. erraticum* (Walck.), carnifex Thor. — Brusje [24]. o. Hvar [39], Velebit, Đakovo [25].

25. *Ch. pelasgicum* (C. L. Koch). — Spljet, o. Hvar [39], Zadar; Glavotok, Omišalj; Bakar, Rijeka.

Gen. Trachelas L. Koch.

26. *T. maculatus* Thor. (Ceto Sim.). — Starigrad o. H., Tajer; Omišalj; Jablanac, Senj, Novi, Povile 9./VIII. 99. ♂, Selce, Crkvenica, Sv. Jelena, Bakar ♀ ♂ 2./IV. 92., 30./VIII. 93. ♂, Rijeka, Orehovica.

Gen. Liocranum L. Koch.

27. *L. rutilans* (Thor.). — Bakarac, Plitvice [25].

28. *L. rupicola* (Walck.). Vidi E. Sim. Ar. Fr. 1878. — Topusko.

29. *L. perarmatum* Kulcz.. — Crkvenica, Bakarac, Bakar [25].

30. *L. annulipes* Kulcz. — Jaska, Osijek [25].

31. *L. tenuissimum* (L. Koch). = Mesiotelus Sim. 1897. = Chiracarthium L. K. 1866. — Spljet [24], Bakar.

Gen. Agroeca (Westr.).

32. *A. celans* (Blackw.). = Scotina c. (Blackw.), v. Menge. Preus. Sp. 1873. — Bakar, Martinjšćica, Rijeka.

33. *A. gracilipes* (Blackw.). = Scotina g. (Bl.). — Rijeka [25].

Gen. Phrurolithus (C. L. Koch).

34. *Ph. festivus* (C. L. Koch.). — o. Hvar [39] sub Micariosoma, Arbanasi, Novigrad; Krk, Lunte, Sv. Duh, Omišalj; Francikovac, Kriviput [25], Crkvenica, Grižane, Bakar 22./V. 90. ♀ ♂ — 16./VI. 93. ♂, Sv. Kuzma, Kostrena s. L., Rijeka, Orehovica, Gospić, Ruma [25].

35. *Ph. minimus* C. L. Koch. — Rijeka, Orehovica, Đakovo [25].

Gen. Zora C. L. Koch.

36. *Z. spinimana* (Sund.). — Velebit [25], Bakar, Rijeka.

37. *Z. nemoralis* (Blackw.). = Plitvice, Medak, Ogulin, Zagreb.

Gen. Micaria Westr.

38. *M. fulgens* (Walck.). = Drassus f. W. — Dalmacija [3], Velebit (Vaganski vrh) [25], Vrata, Bakar, Krk, Punat.

39. *M. formicaria* (Sund.). — Omišalj 7./VI. 92. ♂. Bakar 17./VII. 92. ♀, Vrdnik [25].

Digitized by Google

40. *M. Rogenhoferi* O. Her. — Karlobag, Krivi put, Crkvenica, Bakar 30./IV. 90., Ogulin.

41. *M. halybeia* Kulcz.. — Karlobag, Senj, Kraljevica, Rijeka [25].

42. *M. pulicaria* (Sund.). — Velebit (Vagan. vrh) [25].

Gen. Bona Pavesi.

43. *B. dives* Luc. = Micariolepis Sim. 1879. — Bakar 4./V. 90. ♂ ♀, Rijeka.

Gen. Anyphaena Sund.

44. *A. accentuata* (Walck.). — Cavtat, Starigrad o. H.; Malinska; Vinodol, Novi ♂ ♀ 15./IV. 97., Bakar 12./IV. 92 ♂, Rijeka, Izvor Rječine 22./V.90., Trnovica, Plitvice, Leskovac, Zagreb, Zagrebačka gora, Osijek.

45. *A. sabina* L. Koch. = erratica Herm. — Brusje [24]. Spljet, Karlobag, Senj, Bakar, Kraljevica, Rijeka [25].

Fam. **Agalenidae.**

Gen. Cybaeus L. Koch.

1. *C. tetricus* (C. L. Koch). — Mosunje, Mrzla vodica, Risnjak [25],

Gen. Cicurina Menge.

2. *C. cicurea* Menge. — Velebit [25].

Gen. Tuberta Sim.

3. *T. arietina* (Thor.). — Velebit [25], Bakar, Orehovica, Vrata, Mrzla vodica.

4. *T. mirabilis* (Thor.). — Orehovica (25. juv. ♂).

Gen. Cryphoeca Thor.

5. *C. silvicola* (C. L. Koch). — Vrata, Fužine, Viševica, Mrzla vodica, Risnjak [25].

Gen. Coelotes Blackw.

6. *C. inermis* (L. Koch). — Bakar, Vrata, Viševica, Mrzla vodica, Risnjak [25].

7. *C. anoplus* Kulcz. — Crkvenica, Bakar, Rijeka; Crni lug Risnjak, Mosunje [25].

8. *C. Gasperinii* Sim. — Spljet [24].

9. *C. Munieri* Sim. — Šibenik [11].

Digitized by Google

Gen. Tegenaria Latr.

10. *T. parietina* (Fourczoy). — Lokrum, Ombla, Zadar, Spljet, o. Hvar [39], Trogir, Pećina (k. Vrane), Novigrad; Krk, Košljun, Punat, Kornić, Rudine, Omišalj, Malinska; Lukovo, Senj, Bribir, Crkvenica, Kraljevica, Bakar ♂ 25./VIII. 93., ♂ 6. i 11./IX. 93., Rijeka, Opatija, Lovran.

11. *T. domestica* (Cl.). — Spljet [24], Velebit, Mosunje, Fužine. Otočac [25], Zagreb, Križevci.

12. *T. campestris* (C. L. Koch). — Sv. Juraj, Crkvenica, Krk (Sv. Duh), Bakar 20./VIII. ♀.

13. *T. silvestris* L. Koch. — Bakar, Mrzla vodica, Risnjak [25].

14. *T. Hasperi* Chyzer. — Crkvenica, Bakar (uz cestu na Meju) [25].

15. *T. pagana* C. L. Koch. — Dubrovnik, Makarska, Starigrad, Spljet, Solin, Trogir, Buk Krke, Novigrad, Senj, Bakar.

16. *T. tridentina* C. Koch. – Konjsko [24].

17. *T. Derhamii* (Scop.). — Velebit [25], Senj, Rijeka, Trsat, Grobnič. polje 2./VII. 93. ♀, Trnovica, Fužine, Mosunje, Jasenak, Jaska, Zagreb, St. Pazua, Osijek.

18. *T. torpida* (C. L. Koch). — Bakar, Vrata, Risnjak, Mrzla vodica, Vrdnik [25].

19. *T. luxurians* Kulcz. — Bakar IV. ♂ ♀, Brušane, Risnjak, Višnjevica, Mrzla vodica, Plitvice [25].

Gen. Agalena Walck.

20. *A. labyrinthica* (Cl.). — Dobrota (Kotor), Vis, Solin, otok Hvar [39], Brusje [24]; Krk, Glavotok, S. Lucija, Omišalj; Senj, Francikovac, Breze [25], Povile, Novi, Selce, Vinodol, Grižane, Bribir, Crkvenica, Kraljevica, Bakar, Škrljevo, Kostrena, Rijeka. Jaska, Topusko, Đakovo [25].

21. *A. similis* Keys. — Buk Krke, Sv. Filip i Jakov, Zadar; Omišalj; Senj, Novi, Crkvenica, Grižane, Dol, Križišće ♂♀ 16./VIII. 93., Zagreb.

Gen. Textrix Sund.

22. *T. denticulata* (Oliv.). — Dol (Bakarac), Ogulin.

23. *T. caudata* L. Koch. — Bakarac, Bakar (uz cestu na Meju) 20./IX. 92. ♂, Draga (Jarčina), 6./VII. cocon.

24. *T. albosignata* Sim. — Polača, Cavtat, Omiš, Spljet; Lukovo, Senj, Novi, Crkvenica, Kraljevica, Bakar ♂ 7./IX. 91., Martinjšćica, Orehovica.

Digitized by Google

25. *T. vestita* (C. Koch). — Vis, otok Hvar [39], Brusje [24], Starigrad, Spljet.

26. *T. coarctata* (L. Duf.). — Dalmacija (29) p. 101.

Gen. Argironeta Latr.

27. *A. aquatica* (Cl.). — Đakovo [25], Bišće (Una).

Gen. Hadites Keys.

28. *H. tegenarioides* Keys. — o. Hvar [8].

Gen. Hahnia C. L. Koch.

29. *H. elegans* (Black.) — Đakovo [25].

30. *H Mengei* Kulcz. — Medak [25].

31. *H nava* (Blackw.) — Trsat 16./III. 86. ♂, Bakar.

Fam. **Pisauridae.**

Gen. Dolomedes Latr.

1. *D. fimbriatus* (Cl.). — Dalmacija v. Carr. l. c. [3], Budva, Kotor, Lokrum, Starigrad, Tajer, Arbanasi, Novigrad; Sv. Filip i Jakov, Senj 6./VII. ♂, Zagreb, Osijek.

2. *D. plantarius* (Cl.). — Zagreb, Božjakovina, Đakovo [25].

Gen. Pisaura Sim.

3. *P. mirabilis* (Cl.). = Ocyale murina C. L. K. — Kotor, Muo, Cavtat, Spljet, Solin, Brusje [24]. Vrana, Vrbica, Zadar; Krk, Punat, Kornić, Malinska; Jablanac, Lukovo, Senj, Novi, Crkvenica, Bakar, Draga, Martinjšćica, Rijeka, Ratulje, Trnovica, Leskovac, Otočac, Podsused, Zagreb, Kralj. zdenac, Topusko, Var. toplice, Đakovo [25], Osijek, Zemun.

Fam. **Lycosidae.**

Gen. Aulonia C. L. Koch.

1. *A. albimana* (Walck.). — Voz 3./VI. ♂ ♀, 15./VI. cocon; Velebit, Kostrena, Bakarac, Bakar 18./VI. coc., Draga, Rijeka.

Gen. Lycosa (Latr.).

2. *L. agricola* Thor. — Ogulin, Osijek 30./IX. 93., Zemun.

3. *L. agrestis* Westr. — Vrana; Omišalj: Bakar 18./VIII., Lipik, Daruvar, Đakovo, Osijek [25].

4. *L. monticola* (Cl). Velebit, Sv. Juraj, Breze, Vratnik, Ogulin [25].

5. *L. cursoria* C. L. Koch. — Breze, Francikovac [25].

6. *L. proxima* C. L. Koch. — Spljet, Vrana, Vrbica, Buk Krke; Voz; Zagreb, Lipik [25], Osijek, Zemun.

Digitized by Google

7. *L annulata* Thor. — Spljet, Glavotok; Omišalj, Polje; Vinodol 4./IV. ♀ ♂ sa cocon., Selce, Crkvenica, Bribir, Bakarac, Bakar već 24./II. ♀ ♂. — 4./V. 90. cocon, Rijeka, Jelenje, Izvor Rječine, Trnovica 22. V. ♂, Velebit, Ogulin, Zagreb, Osijek, Zemun.

8. *L. pullata* (Cl.). — Dalmacija 16. Can. e Pav. sub Leimonia = Lyc. solers C. K. XV. f. 1431—33. — Carr. [3].

9. *L. prativaga* L. Koch. — Velebit [25].

10. *L. riparia* C. L. Koch. — Ogulin.

11. *L. lugubris* (Walck.). — Vratnik, Breze, Gomirje, Jasenak, Plitvice, Ogulin, Đakovo [25].

12. *L. monosa* L. Koch. — Novigrad; Sv. Juraj; Glavotok; Crkvenica, Bakar 30./V. cocon; 8./VIII. cocon, Martinjšćica 6./VI. 93. ♂ (uz more).

13. *L. amentata* (Cl.). — Bakarac, Bakar, Mrzla vodica, Plitvice, Ogulin, Đakovo [25].

14. *L. paludicola* (Cl.). — Velebit, Osijek [25].

15. *L. Wagleri* Hahn. — Šibenik; Crkvenica [25].

16. *L. nebulosa* Thorell. — Dalmacija u Südr. Spinnen 1875.

17. *L. rittata* Keys. — Dalmacija, Keyserl. Besch. n. Sp. 1863., Crkvenica, Lipik [25].

Gen. Tarantula Sund.

18. *T. nemoralis* (Westr.). — Vratnik, Breze, Krivi put, Kuterevo, Vrata [25], Mrzla vodica.

19. *T. miniata* (C. L. Koch). — Velebit [25], Rudine (Krk) 6. VII. 92.. Lipik [25].

20. *T. Apuliae* (Walck.). — Dalmacija, Lycosa t. Fortis [1] i Carrara [3], Konjsko, Muć, Imotski [24], otok Hvar [39], Vrbica, (Vrana). Nad Bukom Krke, Tajer; Polje (Krk); Rijeka [25].

21. *T. inquilina* (Cl.). — Spljet, Velebit, Vratnik [25].

22. *T. striatipes* (Dolsch). — Osijek.

23. *T. albofasciata* (Brullé). — Kotor, Spljet, Brusje [24], Skradin, Arbanasi; Kornić, Košljun, Omišalj; Senj, Grižane, Bakar 14./V. ♂, Martinjšćica, Rijeka, Trsat, Orehovica.

24. *T. accentuata* (Latr.). = T. andrenivora Thor. 1872. Rem. — Dalmacija [3] i Can. e Pav. [16]. Vratnik, Francikovac [25], Osijek.

25. *T. cursor* (Hahn). — Brusje [24], Francikovac, Rijeka [25].

26. *T. trabalis* (Cl.). — Velebit, Breze [25], Rijeka, Ogulin.

27. *T. pulverulenta* (Cl.). — Đakovo, Osijek [25].

Digitized by Google

var. *aculeata* (Cl.). — Dalmacija 3 sub vorax W., Risnjak [25].

28. *T. solitaria* O. Her. — Francikovac, Vratnik, Ogulin, Đakovo [25].

29. *T. radiata* Latr. — Cavtat, Hvar, Spljet, Šibenik, Arbanasi; Krk, Lunte, Kornić, S. Lucija, S. Ivan; Karlobag, Jablanac, Lukovo, S. Juraj, Senj, Povile ♂ 9./VIII. 99., Novi, Bakar ♂ 18.VII. 92., Kostrena, Rijeka, Otočac [25].

30. *T. lacustris* Sim. — Spljet [24].

Gen. Trochosa C. L. Koch.

31. *T. infernalis* (Motsch). — Spljet, Osijek, Zemun.

32. *T. robusta* (Sim.). — Osijek.

33. *T. ruricola* (De Geer). — Spljet, Hvar, Konjsko [24]; Košljun, Kornić, S. Mihovil; Velebit [25], Senj, Bribir, Rijeka, Martinjšćica, Orehovica, Đakovo, Osijek [25].

var. *rustica* Thor. — Bakar, Kostrena, Rijeka, Osijek [25].

34. *T. terricola* Thor. — Spljet [24], Bakar, Gomirje, Đakovo [25].

35. *T. lucorum* (L. Koch). — Gospić [25].

36. *T. cinerea* Fabr. — Dalmacija u Carr. [3] i Dolesch. [4], allodroma; Can. i Pav. [16] sub Arctosa.

37. *T. perita* Latr. — Spljet [25].

38. *T. amylacea* (C. L. Koch). — Draga gor., Rijeka, Mrzla vodica, Risnjak, Ogulin, Osijek.

39. *T. variana* (C. L. Koch). — Spljet, Šibenik; Omišalj; Crkvenica, Bakar 29./V. 96, ♂, Ogulin.

40. *V. leopardus* (Sund.) — Kostrena Sv. L., Rijeka, Martinjšćica, Osijek.

Gen. Pirata Sund.

41. *P. Knorii* Scop. — Mrzla vodica, Risnjak [25].

42. *P. piraticus* (Cl.). — Spljet [24], Bakar, Osijek, Zemun.

43. *P. latitans* (Blackw.). — Martinjšćica, Orehovica.

Fam. **Oxiopidae.**

Gen. Oxiopes Latr.

1. *O. lineatus* Latr. — Dalmacija [3] s. Sphasus, o. Hvar [39], Brusje [24], Muo (Kotor), Jablanac; Omišalj 7/VI., Košljun; Novi, Crkvenica, Bakarac, Bakar 11./VI. ♂, Podsused, Đakovo, Vrdnik [25].

2. *O. ramosus* (Panz.). — o. Hvar [39], Kornić (Krk) 28./III. 93., Povile, Zagreb, Đakovo [25].

Digitized by Google

3. *O. heteropthalmus* (Latr.). — o. Hvar [30], Brusje [24], Spljet; Senj, Crkvenica, Novi, Đakovo (25].

Fam. **Attidae.**

Gen. Saltiscus Latr.

1. *S. formicarius* (De Geer). — Krk: Omišalj 7. VI. 92.; Crkvenica, Bakar, Orehovica, Zagreb, Đakovo [25], Osijek.

2. *S. Simonis* O. Her. — Rijeka [25].

Gen. Leptorchestes Thor.

3. *L. beroliensis* C. L. Koch (formicaeformis O. H.). — Mljet (Goveđari), Spljet, Vrbica; Košljun 30./III. 92.; Crkvenica, Meja, Rijeka, Zagreb, Đakovo, Ilok, Vrdnik [25].

4. *L. mutiloides* (Luc.). — Novi, Crkvenica.

5. *L. chrysopogon* Sim. — Brusje [24].

Gen. Synageles Sim.

6. *S. dalmaticus* (Keysl.). — Brusje [24]; Košljun, Kornić, Sv. Lucija, Omišalj 7./VI. 91. ♀, Opatija, Prevez (Raša); Crkvenica, Bakar 29./V. 89. ♂ — 14./VII. 90. ♂.

7. *S. hilarulus* (C. L. Koch). — Omišalj, Bakar 12./VIII. 91., Lovran ♂ 4./VIII. 92.

Gen. Heliophanus C. L. Koch.

8. *H. viriatus* Sim. — Spljet [24].

9. *H. cupreus* (Walck.). — Mljet (Polača), Brusje [24], Spljet, Arbanasi, Zadar; Omišalj; Vratnik, Novi, Povile, Bakarac, Križišće, Bakar 31./V. 90. ♂, Rijeka, Ratulje, Plitvice [25], Ogulin, Zagreb, Zagreb, gora, Lipik, Đakovo [25].

10. *H. dubius* C. L. Koch. — Plitvice [25].

11. *H. patagiatus* Thor. (metallicus Sim.). — Bakar 21./VI. 91., Kostrena.

12. *H. simplex* Sim. — Dalmacija, Simon [10], Crkvenica, Sv. Jelena, Kraljevica, Rijeka [25].

13. *H. lineiventris* Sim. — Kotor, Muo, Spljet, Solin, Novigrad, Bakar, Risnjak 19./VIII. 89.

14. *H. Kochii* Sim. — Budva, Kotor, Tajer, Cavtat, Vis, Starigrad otok Hvar, Spljet, Solin, Buk Krke, Skradin, Zadar; Krk, Punat, Kornić, Malinska, Omišalj 7./VI. 92.; Karlobag, Starigrad, Sv. Juraj, Borova draga, Senj, Povile, Novi, Crkvenica, Kraljevica,

Digitized by Google

Bakarac, Bakar 12./V. 92. ♂, Meja, Sv. Kuzma, Rijeka, Trnovica, Izvor Rječine 22./V. 90., Otočac, Plitvice [25], Osijek.

15. *H. flavipes* (Hahn), varians E. Sim. — Muo (Kotor), Brusje [24]. Buk Krke, Zadar; Kornić, Omišalj; Povile, Kraljevica, Bakarac, Bakar, Martinjščica, Izvor Rječine.

16. *H. auratus* C. L. Koch. — Sv. Juraj (Borova draga), Breze, Bakarac, Plitvice, Đakovo [25].

17. *H. exultans* Sim. — Spljet [24].

18. *H. melinus* C. L. Koch. — Kotor, Vis, Starigrad o. H., Brusje [24], Tajer, Zadar; Krk, Košljun, Punat, Kornić, Sv. Lucija, Omišalj 7./VI. 92.. Voz 24./V. 91.; Karlobag, Lukovo, Sv. Juraj (Bor. draga), Senj, Novi (ot. Sv. Marin), Crkvenica, Bakar 6./V., Krasica, Rijeka, Kostrena sv. B. 27./VI. cocon.

19. *H. calcarifer* Sim. List. d. Att. — Dalmacija.

20. *H. Cambridgei* Sim. — Muo (Kotor), Spljet [24], Buk Krke, Zadar; Senj, Crkvenica, Bakar, Meja 14./VII. 90.

Gen. Epiblemum Hentz.

21. *E. scenicum* (Cl.). — Dalmacija, E. Sim. l. c., Topusko, Zagreb, Đakovo, Osijek, Zemun.

22. *E. mutabile* (Luc.) — Kotor, Spljet, Brusje [24], Zadar; Krk; Senj, Kraljevica 2./IV. ♂. Bakar 7./IV. 92. ♂ — 13./V. ♂. — Vide 29. p. 117.

23. *E. cingulatum* (Panz.) — Osijek.

24. *E. zebraneum* (C. L. Koch) = Tenerum O. Her. — Kotor, otok Hvar [39] s. Caliettera, Arbanasi. Vrbica; Omišalj. Prevez (Raša); Bakar, Ogulin, Zagreb, Đakovo, Ruma [25].

Gen. Pseudicius Sim.

25. *P. piceus* (Sim.). — Rijeka [25].

26. *P. encarpatus* (Walck.). — Budva, Starigrad o. H., Dalmacija (Simon 10.); Omišalj; Novi, Bakar ♂ 7./IX. 94., Đakovo [25].

27. *epiblemoides* Cyzer. — Osijek [25].

Gen. Icius Sim.

28. *I. striatus* (Walck.). — Brusje [24], Solin, Buk Krke; Košljun, Prevez (Raša); Rijeka 20./VII. 90. ♂, Trsat [25].

29. *I. notabilis* C. Koch. — Spljet [24].

Gen. Marptusa Thor.

30. *M. muscosa* (Cl.). — Vrbica, Fužine, Plitvice, Zagreb. Đakovo [25], Osijek.

Digitized by Google

31. *M. pomatia* (Walck.). — Mljet (Polača), Starigrad o. H.; Košljun, Prevez (Raša); Osijek.

32. *M. radiata* (Grube). — Vrana.

Gen. Dendryphantes C. L. Koch.

33. *D. rudis* Sund. — Bakar, Meja, Fužine 22./VIII. 89., Mrzla vodica, Risnjak 18. i 19./VIII. 89., Podsused, Varaždinske Toplice.

34. *D. nidicolens* (Walck.). — Knin, Brusje [24], Vrbica; Malinska; Sv. Juraj (Borova draga), Senj, Novi, Crkvenica, Kraljevica 15./VI. 90., Bakar na Oxycedru ♀ ♂ 16./IV., Rijeka, Martinjšćica ♂ ♀ 2./V. 91. na bršljanu, Volosko, Prevez (Raša); Podsused, Zagreb.

Gen. Menemerus Sim.

35. *M. semilimbatus* (Hahn). — Starigrad o. H., Brusje [24], Spljet, Buk Krke, Vrana (Han); Voz; Karlobag, Lukovo, Sv. Juraj, Senj, Novi, Selce, Crkvenica, Kraljevica, Bakar 24./VI. cop. ♂ VII. coc., Rijeka, Opatija, Lovran. — Vide 29. p. 136.

Gen. Philaeus Thor.

36. *Ph. chrysops* (Poda). — Hvar, Spljet, Skradin, Novigrad, Buk Krke; Krk, Punat, Košljun, Bergut, Sv. Ivan, Omišalj, Voz ♂ 24./V.; Karlobag, Lukovo, Sv. Juraj, Velebit [25], Grižane, Crkvenica, Kraljevica, Bakar 30./V. ♂, Meja, Rijeka, Izvor Riječine 22./V. 90., Grobničko polje, Jelenje ♂ 2./VII. 93., Ogulin.

37. *Ph. bicolor* (Walck.). — Budva, Tajer, Mljet (Polača), Solin, Skradin, Buk Krke, Zadar; Omišalj; Jablanac, Bakar, Rijeka, Orehovica, Zagreb, Lipik, Đakovo [25].

Gen. Attus Walck.

38. *A. pubescens* (Fabr.). — Đakovo, Vrdnik, Osijek [25].

39. *A. Damini* Chyz. — Novigrad 19./VII. 94., Sv. Juraj, Senj, Selce, Crkvenica, Bakar 30./V. 93. ♂ — 6./VI. ♂ ♀; Baška, 8./VI. 97., Glavotok 12./VIII. 93. na pržini uz more [25, 35].

40. *A. Manii.* — Dalmacija: Dolesch. [4].

41. *A. alpicola* Kulcz. — Crni lug, Risnjak (Šmrekovac), 19./VIII. 89.

42. *A. floricola* (C. L. Koch). — Osijek [25].

43. *A. Dzieduszyckii* L. Koch. — Osijek [25].

44. *A. saxicola* (C. L. Koch). — Risnjak 17./VIII. 89. (Šmrekovac).

Digitized by Google

45. *A. penicillatus* Sim. — Krk: Kornić; Crkvenica, Bakarac, Bakar 4./III. 93. ♀, Meja, Kostrena Sv. L.

Gen. Aelurillus Sim.

46. *Ae. v-insignitus* (Cl.). — Dalmacija, E. Sim. l. c., Skradin; Karlobag, Senj.

47. *Ae. gilvus* E. Sim. — Spljet [24].

Gen. Phlegra Sim.

48. *Ph. Bresnieri* (Luc.). — Brusje [24], Vis, Spljet, Zadar; Krk, Omišalj, Sv. Duh, Sv. Ivan; Kraljevica, Bakar 3./X. 91. ♀ ♂, Martinjšćica, Rijeka.

49. *Ph. fasciata* (Hahn). — Karlobag, Bakar, Rijeka, Đakovo [25].

50. *Ph. fuscipes* Kulcz. — Krk: Voz, Francikovac [25].

51. *Ph. lineata* C. Koch. — Spljet [24].

Gen. Pellenes Sim.

52. *P. tripunctatus* (Walck.). — Francikovac [25].

53. *P. Bedelii* (Sim.). = Attus nigrociliatus L. K. — Omišalj, Punat; Senj, Bakar, Meja, Plitvice [25].

Gen. Ergane Keyser.

54. *E. iucunda* (Luc.). — Budva, Kotor (Muo), Tajer, Mljet (Polača), Cavtat, Spljet, Solin, Hvar, Starigrad, Vis, Zadar, Skradin, Buk Krke, Novigrad; Punat, Kornić, Košljun; Karlobag, Jablanac, Lukovo, Sv. Juraj, Senj, Novi, Crkvenica, Bakarac. Bakar, Sv. Kuzma, Draga, Martinjšćica, Rijeka, Opatija, Prevez (Raša).

55. *E. letabunda* (C. L. Koch). — Kotor, Lokrum, Mljet (Polača), Spljet, Solin.

56. *E. falcata* (Cl.). — Att. limbatus u Carr. [3], Brusje [24], Fužine, Vrata, Bitoraj 26. VI., Mrzla vodica, Crni lug, Velebit (Vaganski vrh), Leskovac, Plitvice [25], Zagreb.

57. *E. arcuata* (Cl.). — Dalmacija E. Simon l. c., Ogulin, Lipik, Đakovo [25].

Gen. Maevia C. L. Koch.

58. *M. castriesiana* (Grube) M. multipunctata E. Sim.). — Đakovo, Ruma [25], Bakar, Sv. Kuzma.

Gen. Chalcoscirtus Bertkau.

59. *Ch. infimus* (Sim.). = Calliethera Sim. — Karlobag, Senj, Crkvenica. Bakar, Martinjšćica.

Digitized by Google

Gen. Cyrba Sim.

60. *C. algerina* (Luc.). — Dalmacija E. Simon l. c., Krk (Sv. Duh), Punat.

Gen. Euophrys C. L. Koch.

61. *E. erratica* (Walck.). — Karlobag, Lukovo, Sv. Juraj (Borova draga), Velebit (Vaganski vrh), Viševica [25], Crkvenica, Rijeka.

62. *E. sulfurea* L. Koch. — Spljet [24].

63. *D. obsoleta* Sim. = E. confusa Kulcz. [25]. — Karlobag, Selce ♂ ♀ 27./VI., Crkvenica, Bakar, Rijeka; Krk, Košljun, Punat, Kornić, Bergud, Sv. Duh, Omišalj, Opatija; Osijek.

64. *E. confusa* Kulcz. [25]. — Crkvenica, Kraljevica, Bakar 24./IV. ♂ ♀; — 4./IV. 90. cocon, Rijeka.

65. *E. finitima* (Sim.). — Dalmacija E. Sim. l. c., Vis, Starigrad o. H., Karlobag, Sv. Juraj, Crkvenica, Bakar, Sv. Kuzma, Rijeka; Volovsko, Krk, Voz, Sv. Ivan; Grobničko polje. — Vide 29. p. 136.

66. *E. gambosa* (C. Koch). — Dalmacija E. Simon l. c.

67. *E. imitata* (Sim.). — Dalmacija E. Simon l. c., Kotor; Krk, Košljun, Punat, Kornić, Sv. Lucija, Malinska, Omišalj, Voz; Bakarac, Bakar, Kostrena sv. L., Martinjšćica, Rijeka.

68. *E. altera* E. Sim. l. c. — Dalmacija.

69. *E. frontalis* (Walck.). — Dalmacija E. Sim. l. c., Zadar; Krk, Omišalj 7./VI.; Bakarac, Bakar, Sv. Kuzma, Rijeka, Velebit, Risnjak 18./VIII. 89., Otočac [25].

70. *E. rufibarbis* Sim. — Dalmacija [25], Budva; Krk, Košljun, Omišalj 7./VI. 92.; Jablanac, Starigrad, Lukovo, Senj, Povile, Crkvenica, Bakar 12./IV. i 30./VIII. ♂, Meja, Sv. Kuzma, Draga (Jarčina), Martinjšćica, Rijeka, Orehovica, Plitvice [25].

71. *E. aequipes* (Cambr.). — Velebit: Oštarije (Kubus), Lipik [25].

Gen. Neon Sim.

72. *N. Rayi* Sim.. — Bakar, Martinjšćica [25].

73. *N. reticulatus* (Blackw.). — Crkvenica, Grižane, Ratulje 2./VII. 93. ♀, Velebit (Vaganski vrh), Brušane [25], Risnjak 18./VIII. 98., Vrdnik [25].

74. *N. pictus* Kulcz. — Bakar 10./IV. 92., Martinjšćica 18. III. 86. [25], Orehovica.

Gen. Neaetha Sim.

75. *N. membrosa* (Sim.). — Kornić; Crkvenica [25].

Digitized by Google

Gen Ballus C. L. Koch.

76. *B. depressus* (Walck.). — Dalmacija [3], Kotor, Spljet; Krk Voz, Prevez (Raša), Lovran; Velebit [25], Novi, Bakar, Rijeka, Orehovica, Trnovica Izvor Riječice 22./V. 90., Zagreb, Đakovo [25].

77. *B. biimpressus* E. Simon l. c. — Dalmacija.

Conspectus

familiarum, generum et specierum:

	Genus	Species		Genus	Species
Avicularidae . .	3	4	Pholcidae . . .	3	5
Uloboridae . . .	2	4	Theridiidae . .	16	48
Zoropsidae . . .	1	2	Argiopidae . .	46	129
Dictynidae . . .	4	17	Mimetidae . .	2	4
Eresidae	1	2	Thomisidae . .	14	59
Filistatidae . . .	1	3	Clubionidae . .	12	45
Sicariidae . . .	2	3	Agalenidae . .	11	31
Dysderidae . .	4	19	Pisauridae . .	2	3
Drassidae . . .	11	48	Lycosidae . . .	5	43
Zodariidae . . .	1	6	Oxyopidae . .	1	3
Urocteidae . . .	1	1	Attidae	23	76

Summa:

Familiarum . .	22
Generum . . .	166
Specierum . . .	555
Varietatum . . .	6
Subspecierum .	5
Forma	2

Digitized by Google

Index generum.

	Pag.
Aelurillus	48
Agalena	41
Agroeca	39
Amaurobius	15
Anyphaena	40
Aphantaulax	20
Argiope	30
Argyrodes	22
Argyroneta	42
Ariamnes	22
Asagena	25
Attus	47
Atypus	15
Aulonia	42
Ballus	50
Bathyphantes	27
Bona (Micariolepis)	40
Brachycentrum	25
Brachytele	14
Callilepis	20
Centromerus	27
Ceratinella	25
Chalcoscirtus	48
Chiracanthium	38
Cicurina	40
Clubiona	38
Cnephalocotes	25
Coelotes	40
Coriarachne	34
Crustulina	24
Cryphoeca	40
Cybaeus	40
Cyclosa	30
Cyrba	49
Dendryphantes	47
Diaea	35
Dictyna	16
Dicymbium	26
Dicyphus	26
Diplocephalus	25
Dipoena	24
Dismodicus	26
Dolomedes	42
Drapetisca	28
Drassodes	18
Drassus	19
Dysdera	17
Enoplognatha	25
Entelecara	26
Epeira	31
Epiblemum	46
Episinus	22
Eresus	16
Ergane	48
Erigone	27
Ero	33
Eucta	30
Euophris	49
Euryopis	22
Filistata	17
Formicina	27
Glyptogona	30
Gnaphosa	20
Gonatium	26
Gongylidium	26
Hadites	42

Digitized by Google

	Pag.
Hahnia	42
Harpactes	18
Heliophanus	45
Heriaeus	35
Holocnemus	21
Hypomna	26
Hyptiotes	15
Icius	46
Kulczyńskiellum	26
Labulla	28
Lathrodectus	24
Lathys	16
Leptodrasus	19
Lephthyphantes	28
Leptorchestes	45
Linyphia	28
Liocranum	39
Lithyphantes	25
Loxosceles	17
Lycosa	42
Macrargus	
Maebelia	26
Maevia	48
Mangora	30
Marptusa	46
Maso	27
Menemerus	47
Meta	30
Metopobactrus	26
Micaria	39
Micrommata	37
Microneta	27
Micryphantes	27
Mimetus	33
Misumena	34
Neaetha	49
Nematogmus	27
Nemesia	14
Neon	49
Olios	38
Oxyopes	44
Oxyptila	35
Pachygnatha	29
Pedanostethus	25
Pellenes	48
Peniza	33
Phoeocedus	19
Philaeus	47
Philodromus	36
Phlegra	48
Pholcus	21
Phrurolithus	39
Pirata	44
Pisaura	42
Pistius	34
Plocamis	23
Poecilochroa	20
Porrhomma	27
Prosthesima	19
Pseudicius	46
Pythonissa	20
Runcinia	34
Saltiscus	45
Scotophaeus	19
Scytodes	17
Segestria	18
Singa	33
Spermophora	21
Stalita	18
Steatoda	24
Stemonyphantes	29
Synaema	36
Synageles	45
Tapinocyba	26
Tapinopa	29
Taranucnus	28
Tarentula	43
Tegenaria	41
Tetragnatha	29
Teutana	24
Textrix	41
Thanatus	37

Digitized by Google

	Pag.		Pag.
Theridium	22	Ulesanis	23
Thomisus	34	Uloborus	15
Tibellus	37	Uroctea	21
Titanoeca	16		
Tmarus	34	Xysticus	35
Trachelas	39		
Trachygnatha	27	Zilla	33
Trichoncus	26	Zodarium	21
Trichopterna	25	Zora	39
Trochosa	44	Zoropsis	15
Tuberta	40		

Digitized by Google

O posrednim proizvodima perspektivnih nizova tačaka.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. listopada 1900.

Napisao dr. Juraj Majcen.

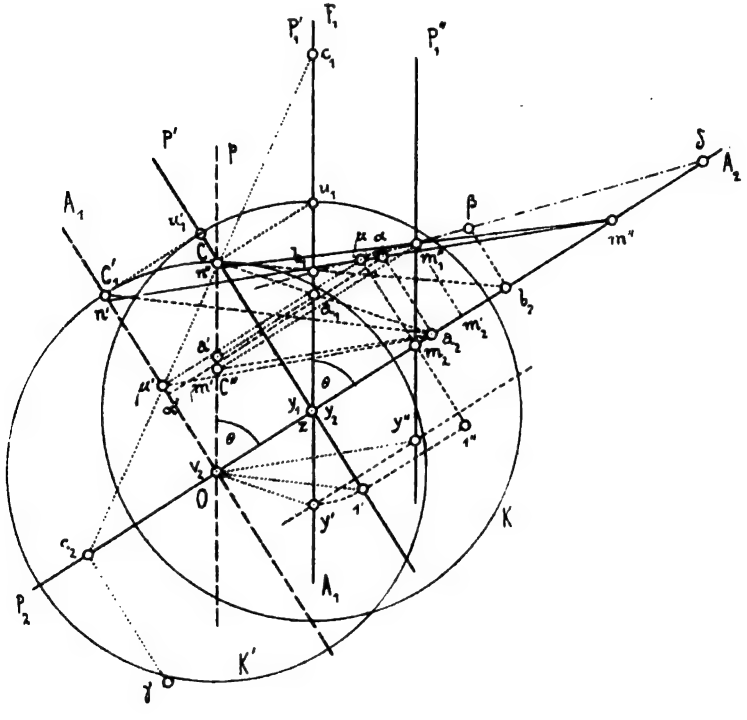
Poznato je, da je „projektivna potencija“ konstantna vrijednost umnoška dviju korespondentnih dužina na dvjema projektivnim nizovima tačaka, od kojih je prva dužina omeđena protutačkom prvoga niza i kojimgod njegovim elementom, a druga protutačkom drugoga niza i onim elementom, koji je korespondentan odabranomu elementu prvoga niza.

1. Konstruiramo li nad svim dužinama nekog niza P_2, koje imaju protutačku v_2 toga niza kao zajedničku krajnu tačku (vidi sliku na str. 55), pravokutnike $v_2a_2\alpha\alpha'$, $v_2b_2\beta\beta'$, $v_2c_2\gamma\gamma'$, ..., u kojima su visine $a_2\alpha$, $b_2\beta$, $c_2\gamma$, ..., jednake korespondentnim dužinama u_1a_1, u_1b_1, u_1c_1, ..., drugoga niza P_1, koji s nizom P_2 leži perspektivno, a protutačka mu je u_1, to će svi spomenuti pravokutnici imati jednaku ploštinu; ova je ploština jednaka vrijednosti projektivne potencije nizova P_1 i P_2. Sve stranice $v_2\alpha'$, $v_2\beta'$, $v_2\gamma'$, ..., padaju u okomicu A_1, postavljenu u tački v_2 na P_2. Približuje li se neka tačka m_2 niza P_2 sve više tački v_2, to će se tačka μ' odmicati sve više na A_1 prema njegovoj neizmjerno dalekoj tački, a tačka μ, koja je ugao pravokutnika $v_2m_2\mu\mu'$, isto tako prema neizmjerno dalekoj tački pravca $m_2\mu$. Približaje li se pak neka tačka n_1 niza P_1 sve više tački u_1, to će se njezina korespondentna tačka u_2 na P_2 odmicati sve više prema neizmjerno dalekoj tački ovoga pravca. Pravci će A_1 i P_2 biti prema tome asimptote krivulje, koja ima svojstvo, da su pravokutnici $v_2a_2\alpha\alpha'$, $v_2b_2\beta\beta'$, ..., jednakoplošni. Ta je krivulja, koju označuju sve moguće tačke α, β, γ, ..., po poznatom zakonu o konstantnosti ploštine onih paralelograma, istostrana hiperbola.

Digitized by Google

Pomaknemo li pravac P_1 u povoljni novi položaj, ali tako, da niz tačaka na P_1 ostane sa nizom na P_2 u perspektivnom položaju, to će projektivna potencija, pravokutnici $v_2a_2\varkappa\varkappa'$, $v_2b_2\beta\beta'$, ..., uglovi α, β, γ, ..., dakle i istostrana hiperbola ostati posve identični.

Od neke je istostrane hiperbole poznata asimptota A_2 (ili P_2), središte O (v_2) i jedna njezina tačka $\varkappa$; na gore spomenuti način moći ćemo konstruovati mnoštvo njezinih tačaka. Odabrat ćemo po-



voljnu jednu tačku C i povući sastavnice CO i Ca_2. Tačka je a_2 nožište okomice, spuštene iz zadane tačke $\varkappa$ na asimptotu A_2. Prenijeti ćemo dužinu $\overline{\varkappa a_2}$ od C prema O do a', te ovom tačkom kao i tačkom C povući paralele sa asimptotom A_2. Paralela iz a' sjeći će sastavnicu Ca_2 u tački a_1, a paralela iz C dati će u presjeku sa pravcem P_1, povučenim kroz a_1 paralelno sa CO, protutačku u_1. Pošto je središte hiperbole ujedno protutačka (v_2) niza P_2, to će umnožak dužinâ $\overline{v_2a_2}$ i $\overline{u_1a_1}$ biti jednak projektivnoj potenciji obaju

Digitized by Google

niza P_1 i P_2, te ujedno površina pravokutnika $v_2a_2\varkappa\varkappa'$. Isto će vrijediti za svaku drugu tačku ove hiperbole. Uzmemo li u P_2 tačku b_2, povučemo Cb_2 i potražimo presječnu tačku b_1 u P_1, to će $\overline{u_1b_1}$ morati biti udaljenost tražene tačke β od b_2 u smjeru okomice $b_2\beta$, jer je i opet umnožak $\overline{v_2b_2} \cdot \overline{u_1b_1}$ projektivna potencija i ujedno površina pravokutnika $v_2b_2\beta\beta'$ za tačku β hiperbole. Tjeme hiperbole naći će se kao ugao kvadrata, kojemu su stranice korespondentno jednake dužine obaju niza, te koji je jednakoplošan s pravokutnicima $v_2b_2\beta\beta'$, ...

Umjesto, da se odabere tačka C, pa onda potraži pravac P_1, na kojem niz tačaka leži perspektivno s P_2 pogledom na odabrano perspektivno središte C, moći će se postupati obratno.

Odabrat ćemo povoljni pravac P_1, pa za tim potražiti središte C, za koje će nizovi P_1 i P_2 ležati perspektivno. Prije svega znamo, da će tačka C ležati na pravcu CO, koji ide središtem O paralelno s odabranim pravcem P_1. Konstruovati ćemo trokut Oy_1y', gdje je $\overline{y_1y'} = \overline{\varkappa a_2}$. Taj će trokut biti trokutu Cu_1a_1 sukladan. Tačku ćemo dakle C dobiti u presjeku pravca CO sa pravcem Ca_2, povučenim iz a_2 paralelno sa Oy'. Iz tačke C dobije se lako tačka u_1, pa tako na isti način kao i prije sve moguće tačke hiperbole.

U oba ova slučaja određeni su perspektivni položaji jednoznačno sa tri para korespondentnih tačaka y_1, y_2; a_1 a_2 i $v_2v_1^{\infty}$, od kojih prvi par pada u jednu tačku.

Odabrat ćemo tačku C'_1 povoljno u asimptoti A_1, pa potražiti pravac P', tako da nizovi P' i P_2 budu pogledom na C_1 kao perspektivno središte, perspektivni. Na isti način kao i prije, dobit će se protutačka (u_1) na nizu P'. Ploština pravokutnika $v_2\varkappa u'_1C'_1$ morat će biti jednaka ploštinama pravokutnika $v_2a_2\varkappa\varkappa'$, $v_2b_2\beta\beta'$, ..., jer su za perspektivitet sa središtem C'_1 dužine $\overline{v_2z_\infty}$ i $\overline{zu'_1}$ korespondentne, a ujedno priklonjene pod pravim kutom, jer pravac P' mora da je sa sastavnicom C'_1O, t. j. sa A_1 paralelan, kao i prije. S tih će razloga uvijek protutačke nizova na P' biti ujedno tačke hiperbole, koja na prikazani način resultira iz projektivne potencije. Na ovaj se način daju iz zadane dužine $\overline{\varkappa a_2}$ konstruovati sve moguće tačke hiperbole s pomoću okomica $C'_1u'_1$ na asimptotu A_1, odaberu li se na toj asimptoti sve moguće tačke C'_1 kao perspektivna središta za niz P_2 i sve moguće nizove P', koji su sa A_1 paralelni.

Digitized by Google

Povuku li se istom tačkom $(y_1 y_2)$ asimptote A_2 svi mogući pravci P'_1. koji tvore pramen zraka, to će protutačke u_1 svih tih pravaca ležati na kružnici K, opisanoj iz središta y_1 polumjerom $\overline{y_1 u_1}$, za to, što svi jednakoplošni pravokutnici, kojima je osnovka $v_2 y_2$ zajednička, imaju istu visinu, dakle je udaljenost svake protutačke (u_1) na pravcima P_1 od y_1 (ili y_2) ista. Pošto je ujedno uvijek $\overline{y_1 u_1} = OC$, to će perspektivna središta C' za sve pravce P'_1, koji prolaze istom tačkom y_1, ležati na kružnici (K'), kojoj je središtem tačka v_2 (ili O), a polumjer jednak polumjeru kružnice K sviju protutačaka. Odakle slijedi u opće za dva perspektivna niza tačaka:

Okreće li se jedan (P_1) od dvaju perspektivnih niza tačaka oko zajedničke korespondentne njihove tačke $(y_1 y_2)$, dočim drugi (P_2) ostaje nepomičan, to će protutačke (u_1) niza P ležati na kružnici K, kojoj je središte tačka $(y_1 y_2)$, a polumjer $\overline{y_1 u_1}$. Sva će perspektivna središta pogledom na P_2 i sve položaje P_1 ležati na kružnici (K'), kojoj je središtem protutačka nepomičnog niza (P_2), a polumjer jednak polumjeru kružnice K.

Čim je poznata jedna tačka hiperbole, moći će se pomoću kružnicâ K i K' odrediti sve ostale. Trebat će samo odabrati u K' povoljnu tačku C, povući paralelu tom tačkom sa P_2, i potražiti njezino bliže sjecište (u_1) sa K. Na prije razjašnjeni način naći će se ovako α, β, γ, ...

2. Kao što je već spomenuto, možemo za konstrukciju ovih tačaka upotrijebiti kojigod pravac P_1, pri čem je dakako središte C već određeno. Odaberemo li sve moguće pravce P'_1, koji su sa P_1 paralelni, ali priklonjeni prema P_2, to će za sve perspektivne nizove (P_2, P'_1), (P_2, P''_1), (P_2, P'''_1), ... s pomoću pripadajućih središta C', C'', C''', ... resultirati uvijek identična istostrana hiperbola. Na svakom se od nizova P'_1, P''_1, P'''_1, ..., nalazi po jedna protutačka u'_1, u''_1, u'''_1, ..., pa se pita, što je mjerstveno mjesto svih ovih protutačaka?

Povući ćemo nekom tačkom m_2 niza P_2 pravac P''_1, priklonjen pod kutom ϑ prema P_2, pa na prije rečeni način potražiti središte C'' za perspektivne nizove P''_1 i P_2. Tačka će C'' ležati u pravcu OC'' $\perp P''_1$. Udaljenost protutačke m'_1 na P''_1 od m_2 biti će takova, da umnožak $v_2 m_2 \,.\, \overline{m_1 u_1}$ bude jednak projektivnoj potenciji, koja je i za nizove P''_1 i P_2 ista kao prije. Ploština paralelograma $v_2 m_2 m'_1 m'$ biti će jednaka $\overline{v_2 m_2} \,.\, \overline{u_1 m_1}$[1] $.\, \cos(90 - \vartheta)$. Ovaj će

[1] $u_1 m_1 = m_2 m'_1$. Tačka je m_1 presjek spojnice Cm_2 sa pravcem P_1.

Digitized by Google

izraz ostati konstantan za sve moguće nizove P'_1, P'''_1, ..., jer je konstantna projektivna potencija i kut ϑ. Svi će dakle paralelogrami, tvoreni na ovaj način, imati istu ploštinu. Za to će tačke u'_1, u''_1, u'''_1, ..., ležati na hiperboli, za koju su P_2 i paralela, povučena tačkom v_2 sa svim pravcima P_1, asimptote. Ujedno se uviđa, da će sva perspektivna središta C', C'', C''', ..., ležati na istom pravcu OC'. Sva će središta C', C'', C''', ... tvoriti niz tačaka, koji je s nizom na P_2 projektivan, kako se to lako uviđa, uzmu li se u obzir jednako projektivni pramenovi oko tačaka v_2 i a_2, koji nastaju, provede li se konstrukcija sviju protutačaka u_1.

Tački v_2 kao tački niza P_2 korespondira neizmjerno daleka tačka C^∞ na nizu OC', a istoj tački, kao tački niza C, neizmjerno daleka tačka ξ^∞ niza P_2. Svi pravci P'_1, P''_1, P'''_1, ..., tvore paralelni pramen zraka, koji sa P_2 leži perspektivno, a sve paralele, povučene središtima C sa pravcem P_2, paralelni pramen zraka, koji je s nizom C perspektivan. Poradi projektivnosti nizova C i P_2 jesu oba ova paralelna pramena projektivna. Njihov je proizvod općena hiperbola, za koju su pravci P_2 i OC' asimptote.[1]

Udaljenost $m_2m'_1$ jednaka je udaljenosti $m_2\mu$, jer je μ tačka istostrane hiperbole, a umnošci $m_2m'_1 \,.\, v_2m_2$ i $m_2\mu \,.\, v_2m_2$ moraju biti jednaki projektivnoj potenciji.

Odatle se razabire konstrukcija općene hiperbole iz istostrane, koja s prvom ima jednu asimptotu i središte zajedničko. Radi projektivne srodnosti kružnice i istostrane hiperbole, podsjeća ovaj snošaj općene i istostrane hiperbole na srodnosti među kružnicom i elipsom.

Iz navedene konstrukcije da se lako odrediti sjecište povoljne hiperbole s pravcem, koji je s jednom njezinom asimptotom usporedan, ako je od hiperbole poznato središte, druga asimptota i jedna tačka krivulje. Treba li naći presjek krivulje s pravcem P''_1, postavit će se u tački m_2 okomica na P_2, i odrediti protutačka (μ) na ovoj okomici, koja je ujedno tačka istostrane hiperbole. Prenese li se udaljenost $m_2\mu$ od m_2 na pravac P''_1, dobit će se tražena sjecišna tačka m'_1.

[1] Pojedine korespondentne tačke nizova C i P_2 naći će se jednostavno, odaberu li se tačke C, pa se na prije spomenuti način potraže pravci P_1, tako da uvijek C^x, P^x_1 i P_2 leže perspektivno. Sjecište pravca P^x_1 sa P_2 korespondentna je tačka središtu C^x.

Digitized by Google

Potraži li se tangenta istostrane hiperbole u jednoj njezinoj tački (μ), to će po poznatom zakonu biti $v_2 m_2 = m_2 m''$, gdje je m'' sjecište tangente sa asimptotom P_2. Povuče li se pak tangenta druge hiperbole u njezinoj tački m'_1, morati će ona sjeći asimptotu P_2 u istoj tački m'', jer će po istom zakonu opet biti $v_2 m_2 = m_2 m''$, pošto je v_2 zajedničko središte obiju hiperbola. Vidi se ujedno, da su odsječci $v_2 n'$ i $v_2 n''$, što ih čine tangente u μ i m'_1 na asimptotama A_1 i OC'' *(p)*, jednaki, jer je $v_2 n' = 2.\ m_2 \mu$, $v_2 n'' = 2.\ m_2 m'$, a $m_2 \mu = m_2 m'_1$. Uslijed toga će poradi konstantnosti kuta ϑ sve sastavnice pripadajućih tačaka μ, m'_1; ν, n'_1; ϱ, r'_1; . . . . .; obiju krivulja biti međusobno paralelne. Istostrana hiperbola i ona, koja postaje iz nje na rečeni način, jesu „afine“ krivulje, njihova je zajednička asimptota „os afinitete“. Iz istokračnog se trokuta $m_2 \mu m'_1$ vidi, da je smjer „zraka afinitete“ okomit na raspolovnici kuta $(90—\vartheta)$, dakle i na raspolovnici kuta, što ga čine asimptote A_1 i OC'' obiju hiperbola. Na taj se način da smjer zraka afinitete upotrijebiti za gore navedenu konstrukciju svih mogućih hiperbola.

Nazovemo li tačku, u kojoj zraka afinitete $\mu m'_1$ siječe os afinitete (P_2) sa δ, to će po poznatom zakonu biti kvocijenat $\frac{\mu\delta}{m'_1\delta}$ konstantan. Ujedno slijedi odatle, da će kvocijenat $\frac{\mu m_2}{m'_1 m'_2}$, to jest omjer udaljenosti pripadajućih tačaka obiju hiperbola od asimptote P_2 biti konstantan. Ta se vlastitost može također zgodno upotrijebiti kod konstrukcija raznih hiperbola.

U opće slijedi za perspektivne nizove slijedeći zakon:

Za konstantnu projektivnu potenciju nekog čvrstog niza tačaka prvoga reda (P_2) i svih nizova (P_1), koji s ovim leže perspektivno, a imaju takav položaj, da su uvijek sva perspektivna središta na nekom pravcu (p) koji prolazi protutačkom (v_2) čvrstoga niza (P_2), to će protutačke (u) promjenljivih pravaca P_1 ležati na hiperboli, za koju su pravci P_2 i p asimptote. Za neki povoljni pravac (p) svi su pravci P_1 međusobno paralelni, te prema P_2 priklonjeni za kut ϑ.

3. Ovdje izvedeni zakoni na neki su stanoviti način srodni zadaćama J. Steinera (vidi Steiner-Schröter, D. Th. d. Kegelschn., gest. a. proj. Eigensch., 2. Aufl., p. 216., z. 2 i 3.), pa držim, da sam s njima napokon našao snošaje, koji su sposobni, da budu

Digitized by Google

projektivni temelji deskriptivnih transformacija u centralnoj projekciji, s kojima se već duže vremena bavim. S gledišta centralne projekcije jest P_2 perspektivna slika pravca, od kojega je P_1 preložaj u ravnini slike. Tačke su v_2 i u_1 nedogled, dotično probodište pravca u prostoru sa prednjom paralelnom ravninom, a tačke C preložena središta projiciranja.

Iz resultata na str. 57. proizlazi za centralnu projekciju, da će sva središta projiciranja (C) u prednjoj paralelnoj ravnini tvoriti kružnicu. Pošto su u preložaju (vidi sliku) sve dužine $(v_2 C)$ jednako duge, morati će tačka v_2 i rečena kružnica određivati upravan čunj, za koji je vrh (v_2) tačka, u koju padaju svi nedogledi pravaca P'_1, a osnovka mjerstveno mjesto sviju središta C. Središte je ove kružnice nožište okomice, spuštene iz tačke v_2 na prednju paralelnu ravninu. Na ovaj će se način moći pomaknuti središte projiciranja u koju god tačku prednje paralelne ravnine, jer se središte C može na spomenuti način povoljno odabrati.

Iz rezultata pak na str. 59, proizlazi, da će svi pravci, kojim se probodišta nalaze u istom pravcu (P_2) u ravnini slike, a nedogled im je v_2 zajednički, biti u prostoru međusobno paralelni i ležati u istoj ravnini. Središta projiciranja pomicat će se na pravcu Cv_2, tako da će nizovi središtâ C i probodišta na P_2 biti projektivni. Odatle proizlazi, da će se središte C moći pomaknuti u kojugod tačku prema ravnini slike, jer se pravci P'_1 mogu povoljno odabrati.

Kombinacijom obaju pomicanja, i to središta C u prednjoj paralelnoj ravnini i prema ravnini slike, moći će se svaka tačka prostora upotrijebiti kao središte projiciranja.

Karakteristično je kod ovih operacija to, da će projekcija (P_2) pravca u prostoru ostati ista, ali će se moći preložaj, a prema tome i središte projiciranja ili obratno, po volji i prema zgodnosti odabrati.

Iz navedenih pravila proizlazi još i način, kako se da naći prava dužina $(a_1 c_1)$ nekog perspektivno predočenog prušca $(a_2 c_2)$ ili obratno. kako se perspektivno prenaša zadana dužina $(a_1 c_1)$ iz neke tačke $(a_2$ ili $c_2)$ za perspektivno predočeni pravac $(v_2 z)$, (vidi sliku), ako je za perspektivnu sliku $(a_2, b_2$ ili $m_2 \ldots .)$ neke tačke pravca $(v_2 z)$ poznata udaljenost pripadajuće tačke u prostoru od probodišta (u_1) istoga pravca sa prednjom paralelnom ravninom. Neka je n. pr. poznata udaljenost $a_2 \alpha = a_1 u_1$; u svrhu

Digitized by Google

rečene konstrukcije odabrat će se *posve* povoljna tačka *(C)* u ravnini i potražiti pripadajući pravac (P_1) na prije spomenuti način. Projicira li se iz C na P_1 zadana tačka a_2, dobit će se a_1; prenese li se od a_1 zadana dužina a_1c_1 do c_1, pa se c_1 projicira iz C na v_2s, dobit će se tačka c_2, tako, da je a_2c_2 perspektivna slika zadane dužine. Obratnim putem naći će se prava dužina a_1c_1 perspektivne slike $\overline{a_2c_2}$. Umjesto, da se odabere C, pa onda potraži P_1, moći će se na način više puta spomenuti obratno postupati.

Digitized by Google

Pontsko-jadranska razvodnica i jadransko područje u Hrvatskoj.

Primljeno u sjednici razreda matematičko-prirodoslovnoga jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. prosinca 1900.

Napisao dr. Milan Šenoa.

I. Pontsko-jadranska razvodnica.

Pontsko-jadranska razvodnica u Austro-Ugarskoj monarkiji može se razdijeliti u dva dijela. Prvi dio dosiže od Reschenscheidecka do Nanosa u Kranjskoj, a drugi od Nanosa do medje hercegovačko-crnogorske kod Metohije.

Prvi dio razvodnice teče južnim vapnenjačkim Alpama, pa je sasma lako odrediti smjer njezin, jer teče osim malih iznimaka većim dijelom samim sljemenom. Tu nastadoše pravilno razvita riječja kako obično u Alpama, pa ne podaju nikakih poteškoća u odredjivanju razvodnice.

Od Nanosa prelazi razvodnica najprije u kranjski, onda u hrvatski, a napokon u bosansko-hercegovački krš. Radi osobitosti tla tu počinje rajon ponornica, što se proteže sve do Cap Matapana. Dvostruki a katkad i trostruki nadzemni i podzemni tokovi glavne rijeke, pritoke ponornice, pak kratka primorska ili podmorska ušća znatno oteščavaju posao. Na mjesto pravilnih otvorenih dolina stupaju sada zatvorene doline — dulibe i ponikve. Strme zagrade Velebit, Dinara, Biokovo itd. smjestile se sasma blizu mora bez prelaza, ali ti gorostasi od 1700—1800 m. visine ne sprečavaju čitav niz rijeka da one ne bi našle podzemni put do mora. Isto vrijedi za neke rijeke, koje tekući prema SI prodiru gorske kose iduć u Pontus. Prema tome pontsko-jadranska raz-

Digitized by Google

vodnica u drugom dijelu ne ide kako u Alpama najvišim sljemenom, nego se spušta katkad do visine 500 m.[1]

Razvodnica ulazi u monarkiju kod Reschenscheidecka, kako je već spomenuto, razvodeći rijeku Adige od pritoka Innovih, provlači se najvišim vrhovima Oetzkoga skupa. Prelazeći preko Timblerjocha i Stubayskih Alpa dolazi do Brennera i tu razvodi pritoke Innove od Eisacka. Od Brennera kreće glavnim bilom Zillerskih Alpa preko Hochpfeilera do Dreiherrnspitze, a onda zakreće na J prema Defferegerovoj dolini, razvodi Rienz od Drave, prelazi Toblachsko polje, pa kod Drei Zinnen tvori medju izmed Italije i monarkije. Držeći se sve do Obeliska glavnoga bila Karnskih Alpa, razvodi Dravu i Zilju od Piave i Tagliamenta. Nješto na Z od prodora Tagliamentova ulazi razvodnica opet u monarkiju, pa ide usporedno sa gornjim tokom spomenute rijeke sve do izvora njezina. Kod Gornjega Trbiža ide na J, prelazi preko Predila i zakreće na I do na vrh Triglava. Ovdje čini velik zavoj u formi ≀. U gornjem je zavoju vrelište Soče, a u donjem zavoju izvor Savice. Sve do Gornje Idrije razvodi rijeku Idriju od desnih pritoka Savinih, a onda kreće na J do Nanosa. Tu ulazi u kranjski Krš.

Već u početku toga drugoga dijela, razvodnica dijeli porječja Vipave i ponornice Reke (t. j. Timava) od ponornica Pivke i Unce, koje su prvotni tokovi Ljubljance. Preko prevale kod Sv. Petra uzdiže se razvodnica do na vrh kranjskoga Snježnika, pa razvodi Kupu i njezine pritoke od jadranskoga područja u Hrvatskoj.

Od Snježnika (1796 m.) ide razvodnica preko Velikoga Risnjaka (1528 m.) do najviše točke Lujzinske ceste (929 m.), pak razvodi Rječinu od Kupe. Odavle kreće držeći se JI smjera do Sljemena (897 m.), najviše točke karlovačko-riječke željeznice, pa se diže do vrha Slavice (921 m.); dovle razvodi Ličanku od Kupe. Do vrha Črmuža (1112 m.) bude razvodnicom Kupe i vrlo oskudnoga vodom kraja, što se od Velike Kapele prema JZ do mora proteže, onda do vrha Bijele Lazice (1533 m.) razvodjem istoga kraja i Dobre, a onda, idući preko Velike Javornice (1375 m.) i najvišega mjesta Rudolfinske ceste (1047 m.) do Bijele grede (1105 m.), razvodi spomenuti primorski kraj od izvor-rijeka Zapadne i Istočne Mrežnice.[2] Od Bijele grede do Maljena vrha (687 m.) blizu naj-

[1] Vidi prilog I. i II.

[2] *D. Franić:* Zemljopisne sitnice (Glasnik hrv. naravoslovnoga društva g. XII. br. 1—3. p. 170) spominje da „Drežničko polje na sve strane

Digitized by Google

više točke Jozefinske ceste (584 m.) razvodi Mrežnicu od Gacke.[1] Dižući se lagano preko Javornika (1141 m.) do Seliškoga vrha (1280 m.) silazi naglo do Cudina klanca (780 m.), pa dijeli porječje Gacke od porječja Korane. Odavle pa sve do Panosa na granici dalmatinskoj zaprema sjeveroistočnu stranu porječje Une. Razvodnica se diže preko Pačenovca (1207 m.) do Kozjana (1209 m.); tu se u nju dokanča razvodnica izmed Gacke i Like. Dalje prolazi preko Paleža (1239 m.), Markova vrha (1002 m.), Crnoga vrha (961 m.) do Udbine (849 m.), a onda se naglo diže preko Orlaševa (1338 m.) do Kremena (1591 m.), gdje se u glavnu razvodnicu dokanča razvodnica Like i Zrmanje. Od Kremena ide glavna razvodnica preko Mazinske ceste (818 m.), Urlaja (1297 m.) i Vranoga kuka (1126 m.), a onda preko Lisca (1336 m.) i Maglaja (1207 m.) silazi do dalmatinske ceste (796 m.) iznad Popine. Odavle se diže preko Kurozeba (1000 m.) i Jelovih tavana (1184 m.) do Panosa (1326 m.) na granici. Izmedju Jelovih tavana i Kurozeba dokanča se razvodnica izmed Zrmanje i Krke. Ono malo porječja Krke što ima u Hrvatskoj, razvodi prema Uni linija od Panosa do Lipova vrha (697 m.).[2]

Od Panosa ulazi Pontsko-jadranska razvodnica u Bosnu, zakreće najprije na SI a onda na JI do Satorplanine, gdje razvodi Krku i Cetinu od nekih ponornih pritoka Unca i Sane. Polja paralelna Dinari šalju svoje ponornice na jednu stranu Crnome, a na drugu Jadranskome moru; za to se i razvodnica spušta do tih polja, siječe ih transversalno, slijedi katkad kose koje dijele ta polja, pa se uspinje do Stožera kod Kupresa. Tu dijeli porječja Vrbasa (t. j.

vodu rastače t. j. u Stajnicu, Dretulju, Mriježnicu i Jadransko more". Pošto sedam malih vrela na polju Gornje Drežnice ide smjerom Z—I, pa se sjedinjuju sa potokom Sušikom, a na Donjoj Drežnici primaju Krakar (v. Rad akad. knj. 122. p. 175), pa se onda podzemno vežu sa Zap. Mrežnicom kod Zagorja (v. Viesti družtva inžinira i arhitekta godine 1891. Lapaine: Tekućice u Krasu), a nijedno vrelo na tom polju ne šalje vodu smjerom I—Z, ne može se Drežničko polje pribrojiti području jadranskom. To je razlog, zašto razvodje ide na Z Drežničkom polju t. j. Rudolfinska cesta (1047 m.), 1038 m., Bijela greda (1105 m.), Vidina greda (744 m.), Javor (1137 m.), 788 m., Jozefinska cesta (583 m.). Vidi: Prilog II. profil 1.

[1] Vidi: Prilog II. profil br. 1.

[2] Vidi: Prilog II. profil br. 2.

Digitized by Google

Plive) od porječja ponornica, što se gube na sjevero-istočnom podnožju Dinare a pripadaju riječju rijeke Cetine.[1]

Od Stožera okreće razvodnica ravno na I, i dolazi preko Raduše i Ivan planine do Bjelašnice (2063 m.), gdje ostavlja Krš. Tu razvodi Bosnu i njezine pritoke od Rame i Neretve. Onda zakreće prema JI preko Treskavice planine do Ljelje (2034 m.), obilazeći vrelište Neretve u velikom luku, dijeli porječje iste rijeke od porječja Drine i Pive, a nješto na S od Metohije kraj Gackoga polja ulazi u Crnu Goru.

Duljina sveukupne pontsko-jadranske razvodnice u monarkiji. i Bosni i Hercegovini iznosi 1154 km.

Do Nanosa, dakle prvi dio razvodnice[2] iznosi 460 km., od Nanosa do Snježnika 45 km., od Snježnika do Panosa u hrvatskom visočju[3] 255 km. Od Panosa do Stožera u Bosni duljina je razvodnice 182 km.,[4] a odavle do granice crnogorske kod Metohije 195 km.[5]

Nešto manje od polovine čitave razvodnice otpada na Krš t. j. 509 km., dok Hrvatskom prolazi nešto više od jedne četvrtine njezine duljine.

Porječje Rječine	243,144750	km.²
Neposredno područje Jadranskoga mora na Riječkom tlu	25,138750	„
Neposredno područje Jadranskoga mora od Rijeke do Crikvenice	125,804253	„
Neposredno područje Jadranskoga mora od Crikvenice do Senja	468,394650	„
Neposredno područje Jadranskoga mora od Senja do medje	423,763750	„
Porječje Senjske bujice	54,973850	„
„ Kozjače i Paklenice u Hrvatskoj . . .	6,077500	„
„ Ličanke i Vinodolske rječine	195,549750	„

---

[1] *E. Doležal:* Razvodje izmegju Pontusa i Adrije u jednom dijelu Bosne. (Glasnik zemaljskoga muzeja u Bosni i Hercegovini, IX. 1897. p. 457—476. Tabla br. I.)

[2] Po *Steinhauser-u:* Hypsometrische Uebersichtskarte der oest.-ung. Monarchie. Wien 1876.

[3] Vidi: Prilog II., profil 1, 2.

[4] *Doležal:* O. c. Tab. IV.

[5] Po „*Generalkarte* von Central-Europa. 1 : 300.000"; Sekcije: K 11 (Sarajevo), K 12 (Ragusa).

Digitized by Google

Porječje	Gacke	966,322500 km.²
„	Like	1816,080000 „
„	Zrmanje u Hrvatskoj	916,580925 „
„	Krke	67,239250 „
Porječje	Jadransko u Hrvatskoj	5309,070125 km.²

Od čitave površine Hrvatske (42535,250 km²) otpada *12%* na porječje jadransko a *88%* na porječje pontsko.

II. Jadransko područje u Hrvatskoj.

I. Rječina.[1]

Rječina (17 km.) tvori granicu Hrvatske i Istre od njezina izvora do Jelenja, pak dalje izmedju Hrvatske i separatnoga teritorija grada Rijeke. Sjeverni dio razvodnice upada joj na granici hrvatskoj u razvodnicu Pontsko-jadransku sve do nješto ispod Maloga Risnjaka; ondje se od nje dijeli na visini od 1200 m., idući preko Velike Pliši (1142 m.) do Jelenja na Lujzinskoj cesti (833 m.), a onda preko Huma i Šestilovića ravno na JZ preko priječke nad Orehovicom do ušća. Ova crta zatvara na hrvatskom i na jednom dijelu riječkoga teritoriju 243,144750 km².[2] a obuhvata vrhove Obruč, Sniježnik, Risnjak itd. pak doline što se s njih do Grobničkoga polja ruše.

Kako većina rijeka i potoka u hrvatskom Kršu, tako i Rječina ima savršeni značaj ponornice. Već je g. 1861. Lorenz na to upozorio, ali on ne traži prvotnoga toka, već uzima, da široki izvor nosi vodu što se je skupila u podzemnim spiljama i dolinama podno spomenutih vrhova. Je li Rječina nastavak 5 km. duge meridionalne *Klanske reke*, što se na Z od izvora Rječine kod kapele Sv. Roka u nekoliko ponora gubi (450 m.). nije ustanovljeno. Jednako je slabo utvrdjeno mnijenje Stacheovo,[3] da je Klanska reka početak

[1] Cf. *Lorenz:* Die Rečina (Program des k. u. k. Gymnasiums in Fiume. 1861.) — Sp. K. 24. XI.

[2] Preostali dio riječkoga teritorija t. j. 25,1380 km², podpada pod neposredno jadransko područje.

[3] *G. Stache:* Die Eocängebiete von Innerkrain u. Istrien. (Jhrbch. d. Geol. R. 1864. p. 12—14.).

Digitized by Google

onih vrela, što ulaze u more medju Rijekom i Prelukom, i nekih submarinih izvora uz onu obalu.

Savitost vapnjenačkih slojeva, što se nalaze izmed Klane i morske obale, protivi se Stacheovom mnijenju, dok Stache opet navodi proti svezi Klanske reke sa Rječinom to, što opaža (analogno sa priječkama na Orehovici, Sv. Kuzmu, Križišću itd.), da je priječka izmed ponora Klanske reke i Rječine od nepropustnoga eocenskoga pješčenjaka. Pogledom na braždjenje slojeva (SZ—JI) možda bi spomenuta vrela od Rijeke do Preluke (a i dalje do Lovrana) odvodila vodu sa SZ t. j. sa dolina, što idu prema Jurdani, a prema tome imala bi Klanska reka svoj nastavak u *Zviru*, što bi se slagalo s jednom sinklinalom (opet SZ—JI).

Iz svoga izvora dolazi Rječina široka i jaka. Lorenz navodi širinu od 30—50 stopa, što dakako vrijedi za proljetne i jesenske kišne mjesece, inače se voda presuši, a samo bujice, što nedaleko izvora s desne strane dolaze sa pješčenjačkih slazoza Židovja, čine da Rječina sasma ne presahne. Izvor je njezin na visini od 323 m., a nad njim se diže strma vapnena stijena, koja je za ponovne izvore stereotipna (tako kod Ljubljančice, Kupe, Une, Krupe, Bune, Bosne, Dubrovačke rijeke itd.) Konstantna temperatura iznosi po Lorenzu 7·3° C. Pošto voda izlazi dosta čista, nagadja se da Rječina ima u nutrini nekoliko basena, jedan povrh drugoga, u kojima zaostaju pijesak i krhotine.

Od vrela teče Rječina u glavnom prema JI, protječući tercijarnu dolinu sa eocenskim numulitnim pješčenjacima. Ta vrsta tla dopušta, da Rječina svoje bregove potpire pa staložuje na obalama pijesak i sitne krhotine svake vrsti (detritus), na kojima nastaju luke. Jedno s drugim je uzrokom, da se fizionomija okoline znatno mijenja i nema obilježja krša. Sve do Lopače tok je zavojit, a onda prelazi na tlo, u kome se izmjenjuje pješčanjak sa vapnencem. Sve do Orehovice, dakle duljinom 5,3 km. stisnula se dolina, pa čini sutjesku kod mjesta Pašaca. Strane okrenute prema S gole su bez vegetacije, dok su prisojni slazovi dosta obrasli. Kako se izmjenjuje materijal, to se na nekim mjestima erozija lakše dogadja, dok na drugima ostaju sutjeske. Erodirani se materijal sakuplja pred zagradama pa tvori brzice, dok se osobito na desnoj obali radi jakoga potpiranja rone bregovi. Tako je g. 1898. poslije jakih kiša nastala katastrofa kod sela Grohova, koje je pučanstvo moralo ostaviti. Dolazeći Rječina opet u numulitni pješčenjak, postaje okolica gotovo do Orehovice romantična i vrlo zanimljiva. Kod Orehovice dolazi

Digitized by Google

Rječina do jedne eocenske priječke od spomenutoga pješčenjaka, što rastavlja njezinu dolinu od susjedne doline Drage, koja se u istom smjeru nastavlja na JI. Pošto je tu primila malenu sušicu sa same priječke, zakreće posred strmih 180 m. visokih vapnjenačkih stijena na JZ, pa tako siječe kroz 2,3 km. u pravom kutu posljedni krednі nabor, što ide usporedno s obalom.[1] Tu prima s desne strane jako vrelo *Zvir*, onda se rastače na više trakova, koji zatvaraju neke manje otoke i Scoglietto, a na Detli Brajdicu, pa ulazi u more izmed Rijeke i Sušaka.

Količinu vode, što na ušću u more ulazi kroz godinu dana, proračunali su na 707,521926 m^3., a pješčenjačkih krhotina nosi Rječina[2] u isto vrijeme do 300.000 mC.

Desni pritoci Rječine dosta su neznatni. Blizu samoga izvora donose joj sa vrha Židovja kod Klane neka pješčenjačka vrela ipak toliko vode, da je njom napunjuju, kad i glavno vrelo presahne. Već spominjani *Zvir* ima konstantnu temperaturu $9,_5{}^0$ C do 10^0 C. Od lijevih pritoka najznatnija je *Sušica*, što izvire ispod vrha Dletva na SI od Klane, pa teče smjerom JI, primajući vodu sa površine od 25 km^2. U početku prelazi eocenskim krajem, a onda kroz 2 km. ide dubokom vapnenjačkom gudurom.[3] Na Grobničkom polju sastaje se s *Kačjakom*, koji nastaje od *Borove drage* i *Mutnoga jarka*, protječe (3 km.) Grobničko polje, pa kod Jelenja ulazi u Rječinu. Ona je kršna sušica, ljeti suha a za kiše nosi mnogo vode i kamenja, što uzrokuje poplave; tako je g. 1852. odnijela sve mostove i brane.

2. Primorčice do Senja i Ličanka.[4]

I.

Onaj niz tercijarnih dolina, što se prostire od izvora Rječine do Novoga smjerom JI usporedno s morem, prekinut je na četiri mjesta priječkama, pa tako nastaje pet dolina, od kojih svaka nalazi svoj prodor prema moru. Te su doline:

[1] *Stache*: Ibid. p. 19.

[2] *Lorenz*: Physikalische Verhältnisse im Quarnerischen Golfe. Wien 1864. p. 44.

[3] *Stache*: Ibid. p. 15.

[4] Sp. k.: 24. XI.; 24. XII.; 25. XI.; 25. XII.

Digitized by Google

1. Dolina *Rječine* sa prodorom kod Rijeke a priječkom kod Orehovice (186 m.).

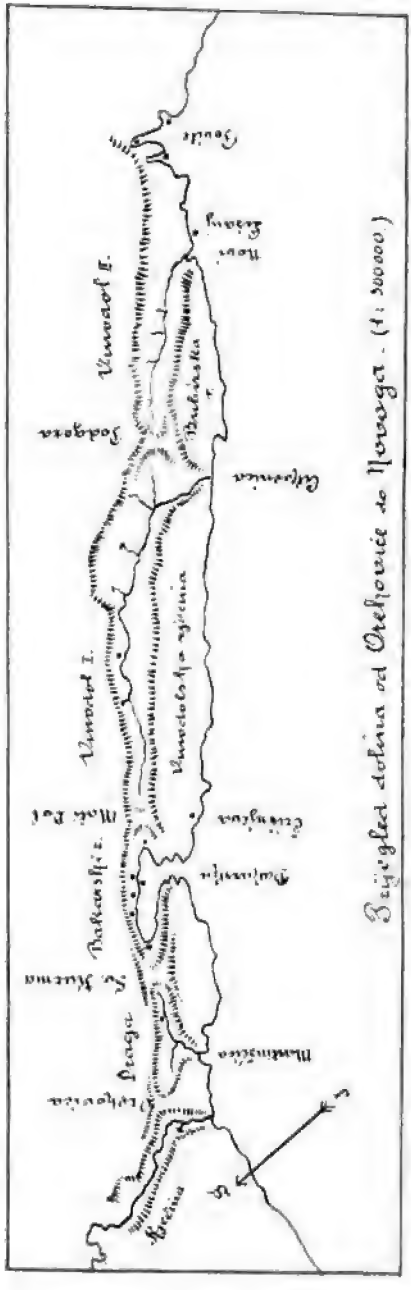
2. *Draga* sa prodorom kod Martinšćice a priječkom kod Sv. Kuzme (206 m.).

3. *Bakarski* zalijev sa prodorom kod Kraljevice a priječkom kod Maloga Dola (309 metara).

4. Dolina *Vinodolske* rječine (odn. *Ličanke*) sa prodorom kod Crikvenice, a priječkom kod Podgore (203 m.).

5. Dolina *Bribirske* rječine sa izlazom kod Novoga.

U geologijskom pogledu sve su te doline slične, samo je u Bakarsku dolinu ušlo more. Zadnja se dolina dokanča direktno u more bez prodora. Kosa, što te doline dijeli od mora, sastoji od krednoga vapnenca, strane samih dolina prati numulitni eocenski vapnenac, a dno je prekrio numulitni pješčenjak, izuzevši Bakarsku dragu, gdje eocenski vapnenci sižu do mora, a pješčenjak valjalo bi tražiti na dnu zalijeva. Braždjenje ima smjer SZ—JI, doline su sinklinalne, jer opadanje slojeva na sjevernom slazu ide smjerom SI do JZ, a na južnom obratno.[1] Na granici numulitnoga vapnenca i pješčenjaka u sjevernoj strani, nalazi se zona vapne-



[1] *Stache:* Eocängebite in Innerkrain etc. (Jhbch. d. geol. R. 1864.).

Digitized by Google

njačkih krhotina dosta velika obsega, što osobito vrijedi za posljednje dvije doline, pak je moguće, da se u pukotinama i spiljama nalaze ostatci tercijarnih sisara. Vode, što se gube na višoj terasi u ponikvama krednih i triaskih vapnenaca, izlaze na onim mjestima, gdje se pješčenjak dira vapnenca. Zato se nalazi pod sjevernim slazom dolina čitav niz vrela, koja imaju značaj vapnenjački: tako u dolini Drage, u Bakarskom zalijevu, ponovni izvor Ličanke, manja vrela u Bribirskoj dolini, i napokon, kad se dolina spušta do mora, vrela kod Povila. — Što sva ta vrela ne imadu tipni kršni značaj, dolazi otale, što ona svoj put nalaze kroz spomenute vapnenjačke krhotine, pa tako nastaju na više mjesta izmed nagomilanoga kamenja. Izvori na priječkama spadaju u vrstu pješčenjačkih vrela. — Kako u dolini Rječine, tako su i u ovim dolinama prisojne strane od lapora i pješčenjaka, lijepo kultivirane niskom šumom i vinovom lozom (Bakarska draga), dok su osojne strane, što sastoje od eocenskih vapnenaca, gole i neplodne kao uporište jake bure.[1] Vanjski slazovi, što se do mora spuštaju, zadnjih su godina prilično ošumljeni, ali s tektonskih razloga oskudijevaju vodom. Bušenja do znatne dubine (n. p. u Kraljevici) ne dovedoše ni do kakova rezultata, jer napokon dopriješe do morske vode.

Duljina Drage,[2] druge doline, iznosi 5 km., pa se proteže od Orehovice do Sv. Kuzma nad Bakrom. Njome protječe neznatni *Draški potok* sa JI, koji ima svoj izlaz u prolomu kod Martinšćice, gdje se u odvaljenim krhotinama na mnogo mjesta nalazi slatka voda. Konstantna temperatura tih vrela iznosi + 9° C.[3] Draški potok prima sa SZ malu jarugu, a pod sjevernim slazom nekoliko akih vrela, što podzemno sakupljaju vodu, koja je pala na višoj terasi, zapadno od Kukuljanova.[4]

Bakarska draga pruža se od Sv. Kuzma do Maloga Dola u duljini od 9 km. Malen trak eocenskoga vapnenca spaja tu dolinu sa predjašnjom. Sjevero-iztočna obala obiluje vrelima, dok je jugozapadna sasma bezvodna. Prva dva vrela nalaze se u samom Bakru, pa su tako jaka, da odma tjeraju mlin. Običnim ih imenom zovu *Jaz*. Istodobnim nabujanjem pokazalo se, da su Bakarska vrela u svezi sa *Kukuljanskim* jezerom, što se od Bakra na sjever

[1] Ibid. p. 12.
[2] Prvu dolinu *Rječine* v. gore.
[3] *Lorenz:* Die Quellen des liburnischen Karstes. (Mtthlung. d. geogr. Ges. Wien. 1859. p. 103.).
[4] *Stache* o. c. p. 20.

Digitized by Google

uleglo u dvostruku ponikvu. Zna se dogoditi, da to jezero stoji veći dio godine pod vodom. Za suha vremena sasma presuši, pa postaje ogromna ponikva, kojoj se dno obradjuje.[1] Uza sjeveroistočnu obalu ima Bakarski zalijev čitav niz jačih i slabijih vrela, od kojih su najznatnija *Černó*, *Dobra*, odakle se Kraljevica opskrbljuje vodom, pak *Čerljene stene*, i napokon vrela u Bakarcu. Vrela izviru na granici vapnenca i pješčenjaka, a ta se u većini slučajeva nalazi u morskom nivou ili nješto pod njim. (C. t. = 9°—9, °C.). Nagle pomorske kiše ne mute tih vrela, nego ona čuvaju svoju čistoću i temperaturu: to je sve dokaz, da ta vapnenjačka vrela dobivaju vodu sa terase, koja se podigla na zaledju zalijeva.[2] Submarina vrela javljaju se kao virovi do 10 m. daleko od obale, voda ključa vertikalno iz mora, pa je za mirna mora lako razabrati, kako se ona miješa s morem i smanjuje diafanost. Vrlo strma jugozapadna obala zalijeva posve oskudijeva vodom, pa je tu nastao prodor izmedju Kraljevačkoga kastela i Sridnje punte.[3] Vrela su bakaračka na obali vapnenjačka a pod Dolom pješčenjačka, jer i kod Dola ima uzak trak pješčenjaka i lapora, koji prelazi u susjednu dolinu,[4] pa je za to i okolina posve različna od susjednoga kraja, okitivši se lijepim šumama, bujnim zelenim livadama, što se dižu od mora do Dola.

Od Martinšćice do Punte Molnarić na Bakarskim vratima nema vrela ni na kraju ni uz more, a jednako je od Oštroga kod Kraljevice do Crikvenice. Samo na jednom mjestu, nasuprot poluotoku Vozu na Krku, ima dva tri vrela u dragi zvanoj *Črišnjeva*. Kako ta vrela stoje u širini priječke kod Dola, voda je našla put do mora, dok se drukčije javlja na sjevernim slazovima doline. Sav taj kraj, što se prostire od ušća Rječine onamo sve do pod Risnjak i dalje prema JI preko Tuhobića (1105 m.), Jelenišća (1106 m.), Crnoga vrha (946 m.) i Dola (309 m.), do Crikvenice primorskom kosom (to je zapadna razvodnica Ličanke), zaprema 125,804250 km², pa je osobito na visinama vrlo oskudan vodom.

U novije vrijeme pokušao je mjernik J. Pištor, da odmogne oskudici vode, pa je u tu svrhu zidao na Hreljinu osobitu vrst nakapnice, koja imitira vapnenjačka vrela, a danas i zbilja opskrbljuje čitavo selo bistrom pitkom vodom.

[1] *Hirc:* Primorje p. 99. Gorski kotar p. 2.

[2] *Lorenz:* Die Quellen etc. p. 103—106.

[3] Sp. k. (g. 1883.) 24 XI., koja je u pogledu nomenklature vrlo slaba, bilježi ime *Pt. Zrini*, što je svakako nastalo krivim čitanjem od *Pt. Sri(d)ni*, kako je narod zove.

[4] *Stache:* o. c. p. 20.

Digitized by Google

II.

Od Maloga Dola (309 m.) prema JI počinje se Vinodol, a raspada se na dva dijela, kako je spomenuto. Sjeverni dio, dug 12 km., ide do Podgore, a južni, 8 km. dug, ide od Podgore do Novoga.

Prvi dio pripada porječju *Vinodolske rječine* odn. *Ličanke*. U toj su dolini sjeverni slazovi dosta neplodni radi jake strmine; dolina je najširа u sjevernom dijelu kod Triblja, t. j. 3 km., a najuža kod Podgore, t. j. 1,5 km. *Vinodolska rječina* (12 km.) izvire na južnoj strani priječke kod Maloga Dola, teče na JI širokom dolinom mimo gradine Drivenika, pa se pod Sušik-selom razlijeva. Iza toka od 6,5 km. prima kod Sušika *Fužinarku* na visini od 61 m.

Fužinarka je ponornica, izvire kao *Ličanka* (12 km.) dva kilometra sjeverno od Fužine ispod Maloga Rogozna na visini od 730 m. iz dva jaka vrela, koja se brzo sjedinjuju, pa teče na JI prema Fužini, protječe jednu sutjesku i ulazi u Ličko polje, veliko 8,2874 km².[2] Kraj, u kome izvire Ličanka, obiluje prirodnim krasotama: tri doline, koje se spuštaju na JI, nemaju nipošto kršnoga značaja, nego podavaju više alpinsku sliku. Iz tih dolina prima Ličanka kod Mačković brda *Lepenicu* (8,5 km.), koja se na svom izvoru zove *Mala voda*, a već kod samoga vrela prima *Kostanjevicu*. Doline i neki vrhovi toga kraja sastoje od pješčenjaka i pješčenjačkoga škrilja, pa i za to ne podsjećaju na krš.[1] U Ličkom polju usjekla je Ličanka duboku jarugu, pa se njom vijuga sve do južnoga ruba. To se polje diže prema JI. Istočni je dio prekrit šiljastim neplodnim materijalom susjednih gora, ponajviše dolomitom, a u zapadnom su dijelu te vapnenjačke krhotine izmiješane s plodnom zemljom.[2] Na sred polja kod Tomina gaja ima *Marasovo jezero* (699 m.), koje je u svezi sa Ličankom, a pritok mu je potok *Benkovac* sa zapadne strane. Ličanka se na Ličkome polju razdvaja, kako se to obično vidja kod ponornica. Jedan trak kreće na I, pa ponire ispod Gavranice, a drugi trak ponire mirno na dva ponora, duga do 6 m. a široka 1,5 m.; tu zna za suha vremena presušiti.[3] Ravna crta od ponora do ponovnoga izvora iznosi 6,5 km., a ponovni izvor nalazi se, kako je spomenuto, kod sela Sušika, pa se javlja iz šest vertikalnih zjala znatne dubine. Za dugo-

[1] *Lorenz:* Ueber die Bedingungen der Aufforstung des kroatischen Karstgebirges. (Mthlng. der geogr. Ges. Wien. 1860. p. 100 sqq.). *Foetterle:* Jhbch. d. geol. R. A. VI. p. 418.

[2] *Lorenz:* Ibid.

[3] *Hirc:* Gorski kotar p. 12 sqq.

Digitized by Google

trajne kiše izbacuje kadšto kamenje. Pod pravim kutom ulazi Fužinarka u Vinodolsku rječinu; ono su joj ime nadjenuli Vinodolci koji dobro znadu, odakle dolazi. Za kišna vremena znadu ti sjedinjeni potoci pretvoriti čitavo tribaljsko polje u veliku močvaru. Sve do svoga ušća prima Vinodolska rječina s lijeve strane znatan broj vapnenjačkih vrela i bujica.[1] I ta vrela spadaju u niz onih vrela, što se javljaju na sjevernim slazovima Drage i na obali Bakarskoga zalijeva. Ispod Badanjske gradine zakreće Vinodolska rječina na JZ, prima ime *Dubračina*, pa utječe u more kod Crikvenice, prodirući usporednu primorsku kosu. Sa Podgore i Marušića prima još dvije neznatne bujice. Porječje Ličanke, priračunav joj i Vinodolsku rječinu, iznosi 195,54975 km^2.

Na južnoj strani podgorske priječke izvire *Bribirska rječina* (6 km.), teče na JI mimo Bribira, pa ulazi u more kod Novoga. I ona prima s lijeve strane vrela i potoke, koji skupljaju vodu sa više terase.

III.

Nešto južnije od Novoga ulazi u more jako vrelo kod *Povila*. Već na samom *Lišanju*, novljanskom kupalištu, lako je osjetiti promjenu temperature, ali najznatnija su vrela u dvjema južnijim dražicama, t. j. u *Teploj dragi* i *Žrnovnici*. Ta se vrela dašto odlikuju konstantnom temperaturom od + 9° C., ne presahnu gotovo nikad, a nad Teplom dragom pruža se do maloga polja kod Ledenica, pak i dalje na istočnoj strani Rudolfinske ceste, dolina, koja je valjda nastala propadanjem, jer je materijal u dubini ispran, kako se to u mnogo slučajeva pokazalo.[2] To je žalibože samo jedan slučaj, gdje se vidi da voda podzemno odvire, dok sav preostali dio obale do Senja (15 km.), koji obiluje obalnim i submarinim vrelima,[3] valja u opće uzeti kao odvodnu zonu za onu vodu, koja zapane na terasama, što se spuštaju od glavne kose Velike Kapele do mora, a zatvara ih razvodnica Gacke i Senjske bujice sa juga, pontsko-jadranska razvodnica sa istoka, a razvodnica Ličanke sa sjevera. Sav taj kraj obasiže 468,3947 km^2. (priračunavši i Bribirsku rječinu), a nigdje nema ni jedan kilometar tekućice. Tako sam Bitoraj zaprema 9000 jutara bezvodna kraja.[4] Sva se voda

[1] *Hirc:* Jugozapadna visočina hrvatska. Rad XCVIII. p. 220—221.
[2] F. g. *Marenzi:* Der Karst. Triest. 1864. p. 14, 15.
[3] *Tietze:* Die Wassernoth im Karste etc. Agram 1874. p. 103.
[4] *Lorenz:* O. c. (Mtthlgn. d. geogr. Ges. Wien. 1860. p. 100 sqq.).

Digitized by Google

gubi u ponikvama, pa izlazi tek na morskoj obali. Tu vrijedi pravilo: nestalo pješčenjaka, nestade i potoka. Kredni i triaski vapnenci rijetko su gdje u tolikom kompleksu razviti kako ovdje, pa su i oni uzrok, da su se tu razvili čitavi subterani sistemi dosta jakih tekućica u raznim horizontima. Njihovi su izvori pod zemljom a njihova ušća pod morem.[1]

3. Bujice od Senja do granice dalmatinske.[2]

Najjača bujica što utječe na hrvatskoj obali u more protječe *Senjsku dragu*. Priračunavši sve dražice, koje se u nju dokančaju i koje joj za jake kiše donose vodu, zaprema Senjska draga 54,973751 km². Duge drage, što ulaze s J izmed Ljubelske kose i Senjskoga bila, pak one manje ali vrlo strme, što se spuštaju sa Vratnika, Orlova gnijezda i Veljuna, skupljaju svoju vodu u blizini Sv. Križa, gdje se k njima pridružuje i *Krišći potok*, pa se draga napunjuje tolikom količinom vode a ta juri takovom silom, da je ne jedan put prouzročila znatne katastrofe. U prvom redu mora da bujica škodi samome gradskom vodovodu, koji skuplja vodu sa *Kraljičina vrela*. Osobito su bile u tom kobne godine 1647., kad je bujica odnijela dobar dio gradskoga zida, pak 1833., kad je srušila nekoliko kuća.[3] U zadnjih pet decenija često se je dogodilo, da je ona počinila mnogo štete, izderala i sa sobom ponijela komad groblja, porušila kuće, a najvećom lakoćom digla veliko tesano kamenje, što su za njezino uredjenje priredili, pa ga odnijela u more.

O uredjenju te bujice mnogo se je mislilo i mnogo radilo, samo je već u početku pogreška učinjena velikim zaporima na izlazu bujice. Oni se napunišo krhotina, pa je voda sebi podignula korito i napunila more na ušću kamenjem;[4] dogadjalo se paće, da je bujica one slabo smještene zapore posve razorila. Nigdje se nijesu bolje potvrdile Heimove riječi: bolje nikakav zapor nego nevaljan. U tom bi pogledu trebalo slijediti metode francuskih regulacija u Hautes i Basses Alpes kod Briançona i na Pirinejima, t. j. zatvarati sve male dražice, koje skupljaju vodu, već u početku priličnim zaporima, a onda nizom zapora

[1] *Tietze*: O. c. 103.
[2] Sp. k. 26. XII; 27. XII; 28. XII; 28. XIII; 29. XIII.
[3] *Fras:* Topographie etc. p. 49.
[4] *Lorenz:* Physikalische Verhältnisse im Quarnerischen Golfe. Wien 1863. p. 44.

Digitized by Google

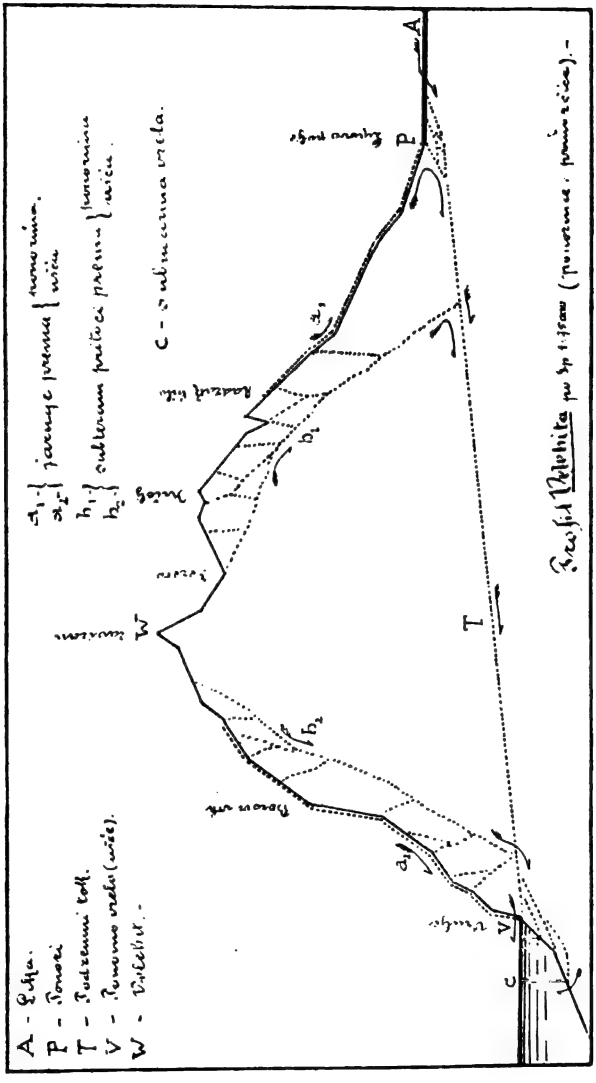
isprekrižati glavnu bujicu. U kratko: trebalo bi započeti regulaciju odozgora. Time voda (bez jakoga slaza) gubi silu, pa ni ne tvori krhotina, koje u takim slučajevima najviše škode.[1]

Čitavih 105 km. dalje, t. j. od Senja do granice dalmatinske morska je obala posve slična onome komadu obale izmed Novoga i Senja, samo se u toliko razlikuje, što je strma, rastrgana, kamenita, i bez ikake kulture. Obala nije osobito razvedena, nego se u nju uvalila sva sila malenih dražica oko 200—500 m. duljine, većinom sa širokim otvorom. Od tih se dražica onda nastavljaju *jaruge* uza strminu Velebita, a ima ih više od dvadeset, koje su dulje od 2 km. i više. U tim se jarugama skuplja kišna voda, u koliko ne može da prodre u ponikve i pukotine, pak stvara vrlo jake bujice, od kojih mnogo strada cesta, što vodi od Senja u Bag. Teren, koji za kišna vremena šalje svoju vodu budi nadzemno budi podzemno u Jadransko more, zaprema 423.76875 km^2. Sa I odn. sa SI zatvara to neposredno jadransko područje crta usporedna sa morskom obalom, koja ujedno sačinjava zapadnu i jugozapadnu razvodnicu Gacke, Like i Zrmanje[2] – Kako kod Povila, tako se i na toj obali nalazi čitav niz obalnih i submarinih vrela konstantne temperature. Njihove početke valja u prvom redu tražiti u ponikvama i dulibama, što se nalaze izmedju spomenute „razvodnice“ i morske obale. Jedno od najznamenitijih takih vrela nalazi se u gradu Bagu, gdje izvire ponovno *Oštarski potok*, što teče od Oštarija na Z. pa se gubi u Oštarskim ponorima.[3] Sve su to valjda ušća *subteranih potoka*, koji ne teku na površini. — Osim ušća jaruga i podzemnih potoka ima još i treća vrsta vrela, a ta su većim dijelom na kraju duljih draga. Taka su vrela: *Žrnovnica* (Valle molini), *Dumboka, Črnika, Lukovska draga, Vrulja* ispod Lukova.[4] *Vrulja* kod Prizne i druga, a sva imaju konstantnu temperaturu, izlaze jaka, tjeraju mlinove, a zna se, da su to ušća *ponornica* Gacke i Like, što poniru na sjevero-istočnom podnožju Velebita. — Pogledom na razdiobu tih vrela *(jaruge, subterani potoci* i *ponornice)* nije ispravno zvati spomenutu liniju razvodnicom, jer i one bujice i podzemne vode, što idu istočnim slazom Velebita, ulaze s Gackom i Likom katkad na istom mjestu

[1] *Dr. M. Neumayr:* Erdgeschichte I. p. 424.
[2] Vidi odjel IV, V, VI.
[3] *Franić:* Glasnik hrv. naravoslovnoga društva, XI. p. 149.
[4] Ovo je specifično ime za takova obalna vrela.

Digitized by Google

u more, kako i bujice i podzemne vode zapadnoga slaza, pa se valjda i njihova voda miješa. Prema tomu nije ni Velebit nikakova



razvodnica, kako ni Velika ni Mala Kapela.[1] Ta tri gorja protječu rijeke podzemno, pak izlaze na njihovim podnožjima.[2]

[1] Rad CXXII. p. 176.

[2] Ni Plešivica ne razvodi dviju rijeka, jer potoci *Korenica* i *Krbava* prolaze ispod nje, pa izlaze kao *Klokot* i utječu u Unu. *(Fras.* o. c. p. 47. *Breyer:* Die Wassernoth. etc. p. 19).

Digitized by Google

Onaj niz vrela, što izlazi od Orehovice do Novoga na sjevernim slazovima spomenutih dolina, nastavlja se do Senja, pak i dalje prati zapadno podnožje Velebita na moru, sve onamo do prodora *Maslenice*, što vodi u Novigradsko more, a onda se nastavlja opet na podnožju Velebita sve do vrela Zrmanje. Taj je niz dva put prekinut, i to Senjskom bujicom, pak bujicama *Kozjačom*, *Velikom* i *Malom Paklenicom*, koje se dokančaju u najjužnijem dijelu Planinskoga kanala. Porječje ovih bujica mnogo je veće od porječja Senjske drage, jer zaprema 84,22322 km², ali od toga otpada na Hrvatsku samo 6,0775 km². Bujice su te zapremile čitav kraj izmed granice dalmatinske i ceste što ide preko Maloga Alana u Obrovac. Ispod najvišega dijela Velebita, t. j. od Vilinjega vrha do Velikoga Malovana i od Malovana do Svetoga Brda, uvalile se dvije s morskom obalom usporedne doline, koje od mora dijeli jedna kamena kosa, visoka 700—1000 m. U prvoj od tih dolina teče, dašto samo za kišna vremena, *Kozjača* (10 km.) na visini od 800 m., pa se od svoga sjeverozapadnoga smjera u oštrom kutu otkreće na JI i probija put sebi do mora uskim kamenim ždrijelom. Drugom, južnijom a nešto nižom dolinom (683—692 m.) ide *Velika Paklenica*, najveličanstvenija velebitska bujica. Izvire nješto na SI od Svetoga Brda kao *Ivina vodica* (1200 m.), onda teče 5 km. ošumljenom dolinom prema SZ, pa, kao i Kozjača, u oštrom kutu zakreće prema moru, a iza daljnjih 8 km. utječe u more kod Staroga grada (Ortopula). Njezinu gornju dolinu okružuju sa svih strana stijene, visoke do 1000 m., nad kojima se još 700 m. više dižu najviši vrhovi Velebita. Od kuka svoga prolazi Paklenica uskim ždrijelom, koje na mjestima nema ni 500 m. širine, a postrane se stijene gotovo vrletno dižu do visine od 780 m. To je najdivljiji dio velebitskoga krša. Kad navali kiša, onda se Paklenica napuni silnom vodom, koja se bijesno baca niz razderano korito, valjajući sa sobom ogromne stijene, koje lomi i krši, pa krhotine i pijesak baca u more. Otale je nastala u daljinu od 2 km. uz obalu plitčina (dub. 1—2 m.). — Nešto je manja od V. Paklenice *Mala Paklenica* (8 km.), koja takodjer silazi sa Svetoga brda, pa primivši *Orljačku* bujicu s desne strane, ulazi u more kod Selina. Pad je njezin osobito u početku vrlo jak, pa poprečno na 1 km. pada 125 m. Ljeti sve te tri bujice skroz presuše, tek Ivina vodica ima nešto vode; korita su im pokrita velikim krhotinama i kamenjem, a doline njihove, koje se zimi zovu „Paklenica“ radi bijesne razorne vode i ljute bure, pridržavaju to ime i ljeti radi nesnosne žege.

Digitized by Google

4. Gacka.[1]

Porječje Gacke zaprema 966,3225 km²., a zatvara ga sa SI zapadna sporedna kosa Velike i Male Kapele, sa J, prema porječju Like, ličko sredogorje, što spaja Velebit sa Kamenom goricom (sedlo kod Janjča), sa Z Velebit, a sa S crta, što vodi od Vratnika preko Velike Javornice do Bijele Grede iznad Drežničkoga polja.

Gacka izvire na jugoistočnom kraju gackoga polja podno brda Vijenca ili Korena. Vrelo je njezino na visini od 457 m., a kod Otočca, gdje se rastače, ima samo 451 m.. dakle u duljini od 17 km. ne pada više od 6 m. Ovo je osebitost svih kršnih rijeka. Gacka je već dosta jaka na svom izvoru, gdje tjera dva mlina, mora dakle da joj gore u zaledju obiluju podzemnom vodom. Sva je prilika, da je prvo vrelo Gackino *Babin potok*, koji izvire pod Seliškim vrhom blizu Cudina klanca na visini od 773 m., pa se kod mjesta Babina potoka sastaje sa potokom *Donja Jaruga*, što dolazi s juga i ponire u zajednički ponor.

Čitav se niz vrela prostro u okrug oko izvora Gacke, tako *Vrbica*, *Kipina*, *Rakita*, *Šeged* i *Janjetovac*, što svakako dokazuje, da se u nutrini brda sakupljaju prilične množine vode, koje hrane vrelo Gacke.

Nedaleko svoga vrela prima Gacka s lijeve strane periodički potok *Begovac*, koji izvire iz Lešćanskoga vrela, i kod mjesta Lešća obilati potok *Pećinu*. Posljednih se godina to vrelo vrlo raširilo. Nekad tek toliko široka, da se je mogla preskočiti, danas izlazi na sedam mjesta, i to na svakom jače, neg što je ključalo na prvotnom izvoru, pa na nju postaviše vodenice.[2] Gackinom vrelu dva kilometra na S izvire iz t. zv. *Majerovskoga* vrela dosta jak potok, koga zovu *Miletina*. Sva tri potoka ulaze u prostrano Gacko polje, pak za jake vode ima u ovom dijelu polja, kod Sinca, poplava radi uspora na ponorima.[3] U svom toku do Otočca drži se Gacka jugoistočnoga ruba Gackoga polja[4], velikoga 80 km²., koje se po malo diže prema SI, pa zato Gacka vodi svoju vodu prilično jarugom, dok se iza toka od 17 km. ne primakne dolini, koju dijele Vital i Prozor od pravoga Gackoga polja. I tu katkad

[1] Sp. k.: 26. XII; 26. XII.

[2] *Franić:* Zemljopisne sitnice. (Glasnik hrv. naravoslovnoga društva, XII. p. 169).

[3] *Beyer:* Denkschrift. p. 18.

[4] *Franić:* Orometrija gornjo-hrvatskoga visočja. Nast. vjesnik. G. II. (1893.) p. 118.

Digitized by Google

Gacka poplavljuje, što će valjda biti od vode, koja podzemno dolazi iz *Crnoga* i *Premužina jezera*, što no se nalaze na J vrha Lisca (vis. 458 m.). Ta su jezera ljeti suha. Do Prozora je s lijeve strane Gacka primila dva već spomenuta pritoka, dok joj s desne pritječe *Krajnovića potok*, što se djelomice gubi u ponorima na polju kod Sinca. Posve su neznatni pritoci *Trnovac* i potok *Sv. Marka*, koji se tek od jake kiše ili od Gackina uspora napunjaju vodom. Ispod gradine Prozora okreće se Gacka u velikom luku oko vršića Vinice, pa se kilometar na J Otočcu rastavlja na dva traka; jedan od njih okreće na S a drugi na Z. Ovaj je potonji trak umjetno iskopan prije 20 godina, pa se zove Karlov prokop, jer je nekad Gacka silno znala poplaviti otočko polje.[1] Svakako je odatle i ime gradu Otočcu, jer je zidan na otoku, kako svjedoči stara ilustracija u djelu Valvasorovu. — U samom se mjestu Otočcu Gacka razdvaja na dva prirodna traka. Prvi teče prema SI, a drugi zakreće na Z prema vrhu Paklju, pa se tvoreći nekoliko otoka i otočića u dvije struge sjedinjuje s Karlovim kanalom.

Ovaj zapadni, vodom obilatiji i veći trak prolazi krasnim livadama pokraj otočkoga predgradja Poljica, prima podzemni odvirak periodičnoga *Komačeva jezera* (vis. 493 m.) što leži na sjever Paklju, proširuje se za tim izpod Gornje Švice u dugoljasto *gornje Švičko jezero*, a onda, rušeći se do pedeset m. u dvanaest slapova, tjera dvanaest vodenica. Svi se slapovi podno Švice sjedinjuju u *donje Švičko jezero* (dugo 2 km.).[2] Za beskišna doba donje je jezero sasma suho, a gornje ima vrlo malo vode. Rubovi se jezera katkad obradjuju, a u dnu se kosi dobra trava.[3] Od polovine rujna do konca travnja jezero se napuni vodom. Onda Gacka, koja se je za suha vremena gubila u ponikvama i ponorima na dnu jezera, napunja čitavu kotlinu, segne preko obala normalnih i nastavi svoj put još za jedan čitavi kilometar prema Z, pa se ispod mjesta „Ponori“ gubi slapom u dubok ponor (420 m. a. v.). Normalna visina jezera iznosi do 8 m.; kad nagle kiše dodju, onda se digne razina jezera 30 –38 m. nad dno, a g. 1802. i opet g. 1872. zabilježiše visinu od 52 m. Dašto[4] da taka izvanredna visina uzrokuje jak uspor, jer voda jezerska segne do visine slapova, pa onda poplavljuje polje oko Otočca. To

[1] *Fras:* Topographie der Karlstädter Militärgrenze. p. 60.
[2] *Klaić:* Prirodni zemljopis Hrvatske. Zagreb, 1874. p. 263. — *Hirc:* Lika. Zagreb 1900. p. 112.
[3] *Fras:* Op. cit. p. 60.
[4] *Beyer:* Denkschrift. p. 18.

Digitized by Google

se tim lakše zgadja, što na tom putu od Otočca do Švice (9·5 km.) iznosi širina Gacke tek 8—15 m.[1]

. Gnaj trak Gacke[2], što od Otočca kreće prema S, obilazi vrh Ostrovicu (750 m.), pa okrenuv svoj tok prema SZ, teče kršnom dolinom tek kilometar širokom, koju s obje strane stisnuše vapneni slazovi, a ima svu silu ponora. Ispod gradine Drenova klanca nalaze se u vapnenjačkom koritu Gackinom mali ponori, pak se za niske vode Gacka sva izgubi u njima.[3] Njekoliko neznatnih jaruga prima Gacka sa desne strane, koji joj tek za kiše dovode vodu, inače se gube u ponorima na polju.

Sve do Brloga teče ona spomenutom dolinom, padajući vrlo malo. Obale joj obrasla niska vrba i drugo grmlje, a s jedne i druge strane pružila se polja, po kojim se bijeli kamen, kao da je posijan. Sasvim u blizini ceste, što vodi iz Žute lokve u Otočac i Gospić, zašla je Gacka u močvarno Gusić-polje. Tu se neposredno pred brloškom stacijom razdvaja. Sjeverni trak protječe još koja dva km. močvarno polje, a onda zakrećući na Z, ulazi u šumovitu dolinu, gdje se ispod Gusića gradine gubi u jedan ponor. U jednu ruku uspor radi uskoga ponora, a u drugu neka vrela, što se na Gusića polju javljaju, čine da je to polje uvijek močvarno. Možda treba baš u tom polju tražiti nastavke od ono pet potoka, koji teku Brinjskim poljem prema J. Od njih je najznatniji ***Krbavica*** sa jakim izvorom pod brdom Siničićem, u kome ima pećina uvijek puna vode, a ta izlazi tolikom silom, da odma tjera vodenice. I smjer tih potoka a i visina[4] (Krbavica 463 m.; ponor na Gusića polju 430 m.) jasni su znakovi, da ih valja pridodati porječju Gacke.[5] I na samom močvarnom Gusića polju ima ponora, gdje se voda gubi, a zovu ih Rapaića ponori.

Od Brloga se Gacka kreće na JI. Izmedju Marasovca i Grabra brda prodrla je put med strmim vapnenim stijenama, a onda se u velikim okukama primiče Vlaškom polju, pa se na visini od 415 m. gubi u ponor ispod vrha Vodenjaka. I tu uzani ponor čini da Gacka poplavljuje inače dosta plodno Kompolje i Vlaško polje.

[1] *Fras:* Op. cit. p. 46.

[2] *J. Murgić:* (Uspomene na Gornju Krajinu, Vienac 1882. p. 92). — *Vuk* i *Franić* (Orometrija p. 19) zovu ju još *Gaštica* ili *Gaščica*.

[3] *Fras.* Ibid.

[4] Visina susjednih tekućica: Stajnica 490 m., Crnačka pećina 462 m., Drežnica 468 m. — Smjerovi: Stajnica SZ, Crnačka SZ, Drežnica SI, Krbavica JZ.

[5] *Fras:* Op. cit. p. 287.

Digitized by Google

Kod Kompolja se veže Gacka po svoj prilici s *Konjskim jezerom* (421 m. a. v.), koje se ljeti sasma presuši. Od Otočca do ovoga ponora iznosi duljina toka 27 km.

Sva tri ponora, i Švički i onaj na Gusića polju i treći na Vlaškom polju, jednako su daleko (16 km.) od drage *Žrnovnice*, koja se uvalila na obali nješto na jug od Sv. Jurja. Ovdje utječe Gacka[1] u Planinski kanal. Ušće je to okrenuto prema sjeveru, sam potok širok je do 15 m., a od izlaza do mjesta, gdje se miješa s morem, ima kojih 75 m. Sa sve tri strane ograđiše ga strme, gotovo osovne kredne vapnene stijene, ispod kojih voda tolikom silom udara, da odmah tjera mlin. Razumljivo je, da to nije jedino ušće, pa da sva tri ponora ne izlaze iz jedne drage, nego svakako iz više njih. Tako draga *Dumboka* i *Crnika* imaju takodjer množinu sladke vode, a jamačno će se Gackina voda javljati u kojem tom submarinom izvoru,[2] kakih ima uza svu kvarnersku obalu.

5. Lika.[3]

Porječje Like obasiže 1816,08 km², dakle upravo trećinu čitavoga jadranskoga porječja u Hrvatskoj.

Odbivši neposredno područje primorskih draga, razvodje je Likinom porječju slijedeće:

Od Velebitske Plješivice (1653 m.) ide razvodje na S do sedla Oltarskoga (1027 m.), onda na JZ do Kosinjskoga vrha (1079 m.) Senjskim bilom. Odavle kreće preko Janjča i Kozjanskoga vrha (1204 m.) do Kozjana (1269 m.), gdje upada u glavnu pontsko-jadransku razvodnicu, pa je prati preko Paleža, Crnoga vrha i Udbine sve do Orlašave (1338 m.). Ostaviv je ondje okreće na Z preko Petračice (960 m.) i Trovere (1234 m.) do Zira (852 m.), a onda, prelazeći Ličko polje, kreće ravno na Radnć, Hrastovu stranu od Velikoga Malovana (1760 m.), dijeleći točno izvor Radučice od izvora Like. Od Malovana ide prema SZ, zatvarajući sa S strane Veliku i Malu Paklenicu, do Vilinjega vrha (1443 m.), onda ide dalmatinsko-hrvatskom medjom do Debeloga

[1] *Beyer:* O. c. p. 23. — *Fras:* O. c. p. 46. — U okolici Švice pripovijedaju, da je tijelo jedne ludjakinje, što se je bacila u ponor Gacke, izišlo bez glave na Žrnovnici.

[2] *J. R. Lorenz:* Physicalische Verhältnisse u. Vertheilung der Organismen im Quarnerischen Golfe. Wien 1863. p. 52.

[3] Sp. k.: 26. XII; 27. XII; 27. XIII; 28. XII; 28. XIII.

Digitized by Google

kuka (1271 m.) i dalje do Porenoga kuka (1065 m.). — Uzdignuv se najprije do Sadikovca (1286 m.), spušta se do sela Oštarija (924 m.), onda preko Alaginca (1234 m.), Budakova brda (1318 m.), Kozjih vrata (1399 m.) do ceste na Velikom Alanu (1412 m.). Odavle se opet diže k S preko Alančića (1612 m.), Ružanskoga vrha (1638 m.) na Gornji Zavizan (1638 m.) do Plješivice.[1]

Ta razvodnica zatvara Ličko polje,[2] 460 km². veliko, koje je šumovitim usporednim kosama, što se od Velebita prema I pružaju, podijeljeno na svojoj zapadnoj strani u čitav red dolina i dugih panoga t. j. dijelova polja, koji se utisnuše med kose.[3] Svaki od ovih posebnih dijelova, a većinom su na zapadnoj strani, ima svoj potok, koji je s geognostičkih razloga dobro razvitoga riječja, jer sastoji od karbonskoga pješčenjaka i verfenskoga škrilja. Osrednje ličko gorje i Velebit zatvaraju Ličko polje sa Z i I. — I šumoviti slazovi velebitski dopuštaju razvitak riječja, pa su tako lijevi pritoci Likini posve drugoga značaja nego desni, koji većim dijelom teku triaskim i krednim vapnencima, utisnuv se kao što i sama Lika u duboke jaruge slične cañonu. Mali pad lijevih pritoka, kojima se izvor-potoci ili sa strmina velebitskih ruše, ili na zapadnom rubu polja izviru kao jaka vrela, čini da se ti pritoci na podnožju razlijevaju sve od Raduča pa do Donjega Pazarišta, tvoreći plavno tlo a gdjegdje i bare. Razlog tim poplavama bit će u tom, što Lika, stisnuta med svoje stijene, ne može da primi dovoljno vode radi neznatnoga pada, pa tako nastaje uspor. Kako kod Gacke tako i kod Like djeluje užina ponora, koji ne može da guta vodu, pa se voda vraća. — Time iznosi plavno tlo[4] u porječjima Počiteljice, Novčice i Otešice gotovo 17 km².

Plavno	tlo	na Lici . . .	0,618275	km².
„	„	„ Počiteljici .	2,342600	„
„	„	„ Brušanici .	6,375850	„
„	„	„ Bužimnici .	8,889725	„
„	„	„ Otešici . .	0,668525	„
		Svega . .	16,889975	km².

Dobrom kanalizacijom i znatnim proširenjem ponora mogao bi se sav taj kraj pretvoriti u plodno tlo, a to bi u onim oskudnim stranama bilo od velike koristi.

[1] Sp. k.: 26. XII; 26. XIII: 27. XII; 27. XIII; 28. XII; 28. XIII.
[2] *Franić:* Nastavni vjesnik II. p. 118.
[3] Ibid. p. 20.
[4] Plavno tlo = Inundationsgebiet.

Digitized by Google

Lika izvire kod sela Kuklića,[1] nedaleko Raduča, na visini od 596 m. te je odmah tako jaka, da okreće mlinska kolesa. Odmah kod izvora prima čitav niz bujica, koje padaju sa strmih šumovitih slazova Hrastove strane (1000 m.).

Od Radučice, koja pripada porječju Zrmanje, vrelište je Like udaljeno samo 3 km. Lika teče u početku na S, a onda kod Metka ulazi u široku dolinu. Sve do Počitelja prima s lijeve strane dosta malih pritoka, koji se osobito na svom vrelištu razgranjuju. Tako ima ispod brda Badnja (1639 m.) jako *Crno vrelo*, koje nikad ne presahne.[2] Ovo a i slična vrela, došavši u dolinu, razlijevaju se pa tvore, kako je spomenuto, do 40 km. dugi močvarni pojas na istočnom podanku Velebita. Ovo plavno tlo prati niz većih i manjih jezera, koja dapače sižu i u porječje Zrmanje sve do Gračaca Njihov diametar iznosi od 5—50 met.[3]

Kod Metka kreće Lika na Z. pa drži taj smjer sve do Počitelja. Tu tvori ona južnu granicu kamenitom polju Rudajici, a na jednom se mjestu razlijeva za kišna vremena i pokriva vodom do 6000 a. Na pol puta izmedju Ribnika i Počitelja okreće Lika na S. Tu se stere na visini od 580 m. već spominjana Rudajica, što se od Ploče do Ribnika stere u duljinu od 17 km., od Metka do Mogorića u širinu od 6,5 km., a zaprema kojih 110 km². Ovo neplodno, većim dijelom kameno polje, koje je posuto ponikvama, optače Lika s južne strane, dok mu je sjevernom granicom Jadova. Kod Donjega sela hvata se Lika Gospićkoga polja, koje sastoji djelomice od bjelutkovih krhotina što se izmiješaše s glinom,[4] i od triaskih vapnenaca. To je povod, što Lika ovdje dobiva obilježja kršnih rijeka. Tok joj je duboko usječen u denivelirano polje, bregovi su joj visoki, većinu pritoka prima s lijeve strane. Tomu je razlog u tom, što lijevi (zapadni) pritoci teku karbonskim pješčenjakom, koji se od Trnovca proteže smjerom JI pokraj Brušana i Počitelja sve do Lovinca.[5] Kako je taj pješčenjak nepropustan, dozvoljava rijekama lijep razvitak, pa im podaje pravilnu fizionomiju. To je

[1] *Hirc:* Lika, p. 108. — *Murgić:* Uspomene (Vienac, 1882. p. 75. krivo pišu „Vuklić" mjesto „Kuklić". V. *Političko i sudb. razdjeljenje* Hrv. i Slav. g. 1891.

[2] *Hirc:* Ibid. p. 70.

[3] *Franić:* Glasnik naravoslovnoga društva. God. XI. p. 144.

[4] *Foetterle:* Geologische Uebersicht des I. Likaner Grenzregimentes. (Jhbch. d. Geol. R. 1861—2. Stzber. p. 298).

[5] *Vukotinović:* Das Lika- u. Krbava- Thal in der Militär-Grenze. (Sitzungsber. der. Akad. Wien 1857. p. 524 sqq.).

Digitized by Google

razlog, zašto su lijevi pritoci razvitiji, te imaju više vode, ali i prevršuju obale, pa poplavljuju polja. Tekući od spomenutoga Donjega sela kod Ribnika 34 km. na SZ, Lika se kod Kalugjerovca (554 m.) primiče jednom od onih ogranaka meridionalnoga sjevernoga Velebita, što tu goru spaja sa Kamenom goricom.

Kredne i triaske vapnenjačke stijene[1] ove spojne gore probija Lika jarugom dugom 11 km. Do pedeset metara visoke stijene stisnuše ovdje rijeku te ona prima tek koji taj pritok ili u samom koritu ili na obali, tako *Crno vrelo* kod Mlakve. — Kod Gornjega Kosinja ulazi Lika u malo Kosinjsko polje, koje je valjda naplavio posljednji njezin pritok *Bakovac*, a onda prodire sutjesku kilometar dugu pa ulazi u Lipovo polje kod Donjega Kosinja. Tok joj je u tom polju zavojit, ona se razdvaja na dva traka, od kojih se jedan u ponorima gubi kod Lipova polja, dok drugi trak još 3 km. prema Z teče, rastavlja se opet u dva traka, pa se gubi kod Kućišta u Stakića-ponor i Begovac. Lika ne ponire poput Gacke u jedan ponor, nego ih u polju nabrojiše stotinu.[2] Ti su ponori tako maleni, da za velike navale vode ne mogu da progutaju sve, nego onda voda zaostaje, pa poplavljuje Lipovo polje. Za kiše zna se voda dignuti do 30 m. visoko, a g. 1879. ležala je na polju punih sedam mjeseci, sve do mjeseca lipnja. Najznatnije se poplave dogodiše 1803., 1823. i 1878.[3]

Po narodnom bi sudu Lika trebala da izlazi u dragi *Vrulje* kilometar i po južno od Lukova.[4] Jasno je, da sva voda neće jednim jedinim podzemnim prolazom izlaziti, nego da u nutrini Velebita nastaju koje kaka rašljanja. Svakako je Vrulja jedan od glavnih izlaza Likinih, što dokazuje jakost vode, koja iz dubine pod pećinama izlazi. Moguće je dašto, da se Likina voda miješa sa Gackinom,[5] pa da se ima izlaz objema rijekama tražiti u dragama Planinskoga kanala, gdje izlazi slatka voda, a možda i u submarinim vrelima. Od izvora svoga do ponora Lika ima duljinu od 78,5 km. a ravni rastoj Lipova polja i Vrulje[6] iznosi 23·5 km. dakle je preko 6 km. dulji od rastoja Gacke i Žrnovnice.

[1] *Foetterle:* Geologische Beschaffenheit des Otočaner Grenzreg. (Jhrbch d. geol. R. 1863. Stzbr. p. 35).

[2] *Hirc:* Lika, p. 108. — *Murgić:* O. c. p. 75.

[3] Ibid.

[4] *Fras:* Topographie der Karlstädter Militär-Grenze, p. 60.

[5] *Beyer:* Denkschrift, p. 23.

[6] Na obali ispod Senja upotrebljava se ta riječ za svaku dragu, u kojoj voda izvire, kako i riječ Žrnovnica za svaku, u kojoj voda tjera mlin.

Digitized by Google

Lorenzovo nagadjanje, da je Lika u svezi sa Vranskim jezerom na otoku Cresu,[1] nije do dana današnjega našlo ni kakove potvrde. Valja u obzir uzeti, da izmedju Lipova polja i Vranskoga jezera ima ravna crta 63 km., da po srijedi leži 1600 m. visoki Velebit, 95 m. duboki Planinski kanal, onda otok Rab i Dolin, pak preko 50 m. duboki Kvarnerolo. Svakako je bolje primiti nagadjanje (jer očevidnih dokaza još nema), da Lika utječe na Vrulji a i u samom moru, i to već s razloga analogije prema Ličanki, Žrnovnici Novljanskoj i Otočkoj, pak cisvelebitskih pritoka Zrmanje, koji svi izlaze baš na obali. Sam je Lorenz na mnogim mjestima Kvarnera i Maltempa našao submarina vrela,[2] a po svoj prilici ih ima još ne opaženih. Kosinjani u ostalom pripovijedaju o sijenu, koje je Lika sa sobom odnijela i kod Vrulje izbacila. Veli se nadalje, da je čitavo Lipovo polje bilo jezero, pa da je trebalo dugo vremena, dok je Lika našla svoj put do mora.

Od desnih je pritoka Likinih prvi *Glamočnica* (13 km.), koja izvire ispod Zira (852), prima za kiše vodu iz duge, obično suhe jaruge *Napojište* (5.5 km.), što izvire pod Velebitom blizu Raduča, a primiv još *Crno vrelo* (4 km.) sa *Vračarevim vrelom* i *Trnavom*,[3] izlazi Glamočnica iz doline u kamenu Rudajicu. Tu prima rijetko koji pritok, nosi sva obilježja kršne rijeke pa utječe kod Metka u Liku.

Jadova (35 km.) izvire kao neznatna sušica kilometar na I od Visuća, blizu kapele Sv. Augustina povrh Mutilića, na visini od 700 m. Sedam kilometara teče na JZ, a onda se gubi u ponorima sjeverno od Komića kod Leskove glave. Od ovoga ponora pa do Ploče proteže se izmed brda Vršine i Trovere dolina, duga 6 km., ravno do ponovnoga izvora Jadove, označena sa 689 m. pred ponorom, onda 676 m., pak 665 m. a na izvoru 654 m. Okolišna se brda dižu 200 do 300 m. više. Bit će to valjda jedna od onih reliktnih dolina, koje prate ponorne tokove na površini, a njekad su bila njihova korita.[4] — Od ponovnoga izvora 12,5 km. Jadova je u većem dijelu godine suha jaruga, što se posred kamenih obala

[1] *Lorenz:* Petermanns Geogr. Mtth. 1859.
[2] *Lorenz:* Physikalische Verhältnisse im Quarnerischen Golfe. Wien 1863. II. prilog.
[3] *Fras:* Op. cit. p. 60.
[4] *F. v. Marenzi:* Der Karst., Triest 1864. p. 14. 15.

Digitized by Google

vore k SZ, tvoreći južnu granicu Vrebačke staze, a optječući sa S pustu Rudajicu. Od Karaule kod Mogorića napuni joj se korito vodom, što iz malih jezera izvire već kod Ploče. Kad Jadova presahne, onda se voda ipak drži u tim jezerima.[1] Ispod Mogorića prima prvi pritok kratak ali vodom obilat, kojim otječe voda, što se sakupila u špiljama onoga kraja, a poglavito u špilji Pčelini. Nješto dalje kod sela Vrepca prima Jadova i opet jak pritok, a ni kilometar dug, što skuplja vodu iz Grahovčeve i Bakićeve pećine, pa izlazi iz maloga jezera, na kome stoji mlin. Kod mjesta Pavlovca ima u koritu njenom kamenje, iz kojega ključa voda,[2] a izmed Bilaja i Vrepca dobiva Jadova opet jak (3,5 km.) pritok, koji takodjer iz jezera izvire. Sve su to pritoci koji odvode vodu iz nutrine Vrebačke staze, koja obiluje spiljama. I u tom stoji razlika prema lijevim pritocima Likinim. Nedaleko Bilaja utječe dosta jaka Jadova na visini od 570 m. u Liku. Lijevi su joj pritoci neznatne „suvaje“, što sa Rudajice dolaze noseći vode samo za kišna vremena. Tu kao da se potvrdjuju riječi poznatoga bečkoga geologa: Vapnenac je ovdje odredio konfiguraciju gora i dolina, vapnenac uvjetuje ovdje i način, kako da se atmosferske oborine sakupljaju i otječu.[3]

Kod Budaka prima Lika s desne strane potok ***Balatin*** (8,5 km.), koji izvire u blizini Perušića, i protječe dosta širokim poljem do Osika na JI, a onda do ušća na JZ, primivši dvije suhe jaruge. Zanimljiv je taj pritok po tom, što ima u svom koritu svrtaka, koji izbacuju vodu, kad sam potok naraste, a za suha je vremena gutaju, tako da i potok presahne.[4]

Neznatan pritok prima Lika iz jezera *Podgreda* u blizini Perušića.[5] Dokazano je, da poznata pećina Samograd ima u vodi što je protječe riba iste vrsti kao i Lika,[6] pak je moguće, da jezero Podgreda i Samogradska voda stoje u svezi.

Od Kalugjerovca do Gornjega Kosinja ne prima Lika, kako je već spomenuto, ni jednoga pritoka, van možda u koritu samom. Kod Gornjega Kosinja prima još potok ***Mlakvinu***.

[1] *Fras:* O. c. 44. — *Franić:* Glasnik XI. 143.
[2] Narod to zove „početci“; v. *Hirc:* Lika, p. 70, 71.
[3] *Tietze:* Geologische Darstellung der Gegend zwischen Karlstadt. etc. Agram, 1874. p. 96.
[4] *Franić:* Glasnik, XI. 143.
[5] *Fras:* O. c. 239.
[6] *Hirc:* Lika, p. 93.

Digitized by Google

S lijeve strane, osim već spominjanih neznatnih pritoka, prvi je pritok *Počiteljica* (9 km.), što izvire iz pješčenjačkoga vrela[1] u polju kod Počitelja na visini od 569 m. Najprije obilazi vrh Drenju, a onda se sastaje sa svojim jakim pritokom *Ribjačom* (5 km.), koji izvire iz Pećinskoga vrha iz vrela dosta jaka, pak od Maloga Urlaja teče na I. Sjedinjeni potoci zakreću na S, pa ulaze izmed Ribnika i Bilaja u Liku. I Počiteljica i Ribjača poplavljuju polje kraj svoga izvora, pak plavno tlo za jake vode iznosi 23.626 a.

Nema u hrvatskom Kršu rijeke, koja bi imala tako razvedeno riječje kako *Novčica*.

Ona prima to ime tek kod Novoga ličkoga, kad joj se korito raširi, pošto je primila vodu iz nekoliko vrela, med kojima se ističe jedno poskok-vrelo (Šedrvan). Za pravo postaje Novičica od dva potoka, i to od *Brušanice* južnije i *Bužimnice* sjevernije. Brušanica (do Novoga 15.5 km.) izvire na visini od 900—1000 m. u jednoj širokoj zavali izmed Sadikovca i Takalica. Sve do Brušana teče ona pod imenom *Suvaje* ravno na I. Tu ima zanimljivo vrelo na prestanke, u kojem je sve do g. 1884. voda sad rasla, sad opadala, ali od one godine prestade periodičnost.[2]

Primivši Brušanica potoke *Milašinovac* i *Jazinu*, rastače se ispred Novoga sela na dva traka: prvi, dulji, zakreće na I, obilazi kod Rizvanuše vršak Paljevinu (626 m.), kreće onda na S, prima neke manje pritoke, što izviru ne daleko izvora Ribjače ispod Urlaja, pa se onda sjedinjuje s drugim trakom. Taj teče od Novoga sela na I, razlijevajući se i dijeleći se na mnoge trakove, koji se svi sjedinjuju kod Novoga. I jedan i drugi trak teku od Brušana širokim naplavljenim dolinama, koje za jače kiše poplavljuju, dok ljeti znadu presušiti. Plavno tlo opsiže 63.759 a.

Bužimnica (do Kaniže 18 km.) izvire 2 km. SZ od Bužima podno Crne kose a tek kilometar na I od izvora Otešice.

Gotovo do ušća njezina tok joj ide na JI, a tek u zadnjem dijelu okreće na I. Od izvora pa do Bužima teče šumovitim uskim klancima, a onda primivši vodu sa jakoga *Crnoga vrela*, koja se skuplja sa Crne grede i Bužimskoga bila, ulazi u široku dolinu. Ima u toj okolini spilja, koje bijahu nekad zidom zatvorene, a danas

[1] Tako *Lorenz* (Physikalische Verhältnisse etc.) zove pravilna vrela u pješčenjaku budi eocenskom budi karbonskom, za razliku od vapnenjačkih.

[2] *Franić:* Glasnik, XI. 145.

Digitized by Google

iz njih ključa voda, pa ulazi u Bužimnicu. Taki je spiljski pritok *Vrbas.*[1] Širokom dolinom (566 m.) teče Bužimnica zašavši za čas u sutjesku izmed Lipovca i Glavice, a onda ulazi u Gornje Blato, koje se prostire 7 km. od S prema I (od Bužima do Novoga sela). Bužimnica i njezin pritok *Bukovac*, što iz *Dukina vrela* kod Trnovca izvire, poplavljuju to polje. Od podnožja Velebita diže se to polje prema I, što označuju brojevi 562 m., 565 m., 572 m. — Slabi pad potoka, pak množina vode, što izvire na podnožju Velebita, povodom su čestim poplavama. Osobito je u tom pogledu *Crno vrelo* Trnovačko, koje podzemno prima vodu potoka *Ljubice*, što nedaleko Oštarija izvire i ponire.[2] Valjda je s tim vrelom u savezu i *Sušica* u Okruglom dolcu. Za jakih jesenskih kiša to vrelo izbacuje velike množine vode pa poplavljuje polje, tako da ima uvijek močvara, a te zapremaju 49.308 a. Već godine 1792. nastojalo se, da se ta močvara osuši, ali poslovi zapeše radi rata. S istoga razloga odluči francuska vlada, da se maknu neki mlinovi na Novčici, koji su priječili odviranje, pa ne samo da su pritoci poplavljivali polje, nego je voda zamuljila vrela pitke vode.[3] Plavno tlo iznosi u porječju Bužimnice t. j. u Gornjem i Donjem Blatu 88.897 a., ako se priračuna polje Smiljansko, koje Bužimničin pritok *Vaganac* poplavljuje svake godine.

Čitav taj kraj, od izvora Like pa do njezina ponora, ističe se svojim osobitim ekstremima u svakom pogledu. U geognostičnom pogledu neplodni vapnenac i plodni pješčenjak, na prvom sva sila spilja i kršne rijeke bez pritoka, u drugom obilje vrela i razviti sistemi; u pogledu klimatskom znatna razlika maksima i minima temperature, u gospodarstvenom kamena polja i prašume, oskudica vode i poplave; u etničnom u dolinama crnomanjasti doseljenici iz Bosne a na Velebitu ruse bradate glave starih stanovnika hrvatskih: sve to podaje čitavom kraju u svakom pogledu vrlo mnogo zanimljivosti. Primivši Bužimnica kod Bogdanića spomenuti pritok Vaganac zove se *Bogdanica.*[4] pa u zavojitom toku posred kamenih obala ulazi u Novčicu. Ova prima onda njezin smjer, krivudajući protječe Gospić, pak blizu Lipe utječe u Liku. Od Novoga do ušća (10 km.) njezino je korito ušlo med visoke kamene bregove.

[1] *Hirc:* Lika, p. 84.
[2] *Franić*: Glasnik, XI. 144.
[3] *Fras:* O. c. p. 61, 151.
[4] *Fras* (O. c. p. 43) veli, da Bogdanica izvire iz spomenutoga potoka Bukovca i Crnoga vrela. — Sp. k. 27. XII. zove potok sve do Bogdanića Bužimnicom a onda Likom (?).

Digitized by Google

Otešica (18 km.) izvire na zapadnoj strani Crne grede, ne daleko izvora Bužimnice. Za malo ulazi u široku dolinu kod Gornjega Pazarišta, a onda, obilazeći Crnu kosu, zakreće mimo Oteša, po kojem nosi ime, najprije na JI pak na I i brzo ulazi u Liku. Izmed Oteša i Crne kose Otešica poplavljuje usko, 3 km. dugo polje (plavno tlo 6685 a,). Čitava dolina, kojom protječu Otešica i njezini pritoci, zaprema preko 20 km². (zatvara je crta Klanac—Oteš—Rastoka), djelomice je naplavljena, djelomice pokrita verfenskim škriljem, a okružuju je triaski i kredni vapnenci sa rudistima i hipuritima[1] na okolišnim gorama. Zato su ti okolišni vrhovi oskudni vodom, dok se pritoci Otešice, *Popovača* sa *Krpanovcem* i *Tisovcem*, dijele kako i Otešica u mnogo struga. Tek pet šest većih vrela, što se nalaze na visini od 1000 m., pokazuju da Otešica i njezini pritoci dobivaju vodu iz nutrine gorske.

Posljednji pritok Likin je *Bakovac* (12,5 km.), koji protječe 20 km. dugu dolinu, što se od Gornjega Kosinja diže šumam Štirovačom od I prema Z do Velikoga Alana. Bakovac izvire iz *Crnoga vrela*, što leži u polovici same doline, pa je bezdan od 36 m. dubine, koja prima vodu sa susjednih planina i sa vrela, što se na njima nalaze: tako sa *Živulje* u samoj dolini Bakovačkoj, *Begovaču* sa Apatisanske dulibe, *Slatku vodu* sa Šatorine (1624 m.) itd. Sva se ta vrela valjda stječu podzemno u Crnom vrelu, koje za kiše tolikom silom prodire, da iz bezdna baca kamenje prilične veličine.[2] Bakovac ulazi kod Gornjega Kosinja u Liku.

6. Zrmanja.[3]

Porječje Zrmanje u Hrvatskoj zatvara već spomenuti dio Likine razvodnice, što ide od Velikoga Malovana preko Zira i Trovere do Orlaševe, prelazeći Ličkim poljem od JZ na SI. Ta se razvodnica katkad diže tek kojih 10 m. nad visinu korita Glamočnice, Jadove i Ričice, koje razvodi. — Od Orlaševe upada ona u pontsko-jadransku razvodnicu sve do Miškovića vrha na Jelovim tavanima (1123 m.), iznad Velike Popine. Odanle kreće na J preko Gole i Kamene glave do Poštaka (1425 m.), pak odanle ravno na JI preko Konjske glave (1337 m.) do medje dalmatinske na Plavljanskom polju.

[1] *Foetterle:* Jhbch. d. Geol. R. 1861/2. Stz. p. 298.
[2] *Murgić:* Uspomene, l. c. — *Hirc:* Lika, p. 111.
[3] Sp. k.: 28. XIII; 28. XIV; 29. XIII; 29. XIV.

Digitized by Google

Ova razvodnica i hrvatsko-dalmatinska granica zatvaraju Zrmanjino porječje u Hrvatskoj, koje obasiže 916,580925 km², dok čitavo porječje u Hrvatskoj i Dalmaciji obasiže, po Klaiću[1], 1487 km².

Porječje to zaprema čitavi južni dio Velebita do Zrmanjskoga klanca, izuzev primorsko područje Velike i Male Paklenice. Jednako spada amo najjužniji dio Ličkoga polja, koji se prema JI do Štikade prostire, pak gotovo čitava Reznik planina, koju optječu Ričica i Otuča, i jedan dio Poštaka, koji treba pribrojiti Dinarskim planinama.

Pritoci Zrmanje u mnogom su različni od pritoka Likinih. Dok Lika, Gacka i njihovi pritoci u glavnom imaju smjer SZ, pritoci Zrmanjini redom teku JI. Lika i donekle Gacka primaju svoje pritoke na Ličko-Gackom polju, pa onda poniru, — dok pritoci Zrmanje poniru svaki za se, pa na južnoj strani Velebita ulaze u nju. Zrmanja nije ponornica, ali je po svoj prilici i ona imala izmedju Žegara i ušća u Novigradsko more svoj podzemni put, koji se je tijekom vremena pretvorio u cañon, što pokazuje još jedan preostali prirodni most nad jednim njezinim neznatnim pritokom.[2]

Zrmanja izvire na istočnom slazu sjevernoga dijela Zrmanjske doline, koja se proteže u najjužnijem dijelu Hrvatske, 12 km. od S prema J do granice dalmatinske. Izvor sam stoji na visini od 280 m., pa je u početku već tako jak, da tjera mlinove. Nabrojili su do 100 izvora pod silnim Novakovića kukom, iz kojih Zrmanja svoju vodu pribire.[3] Vrlo je interesantno vrelište Zrmanjino kao kotao otvoren prema Z, koji okružuju u polukrugu gotovo vertikalne stijene visoke po 200 m., na kojima se već iz daljine krasno razabiru bijeli izderani tragovi osovnih bujica, što k izvoru padaju, pak horizontalne vapnenjačke naslage.

Prema godišnjim dobama mijenja se jakost izvora, koji se može smatrati prototipom Lorenzova vapnenjačkoga vrela. Zrmanja sabire vode, što se na vrhovima i gudurama gube u ponikve; guttensteinskim vapnencem i halstadtskim naslagama idu vode podzemno do izvora, pa teku dalje na površini koritom, koje je nepro-

[1] *Klaić:* Prirodni zemljopis Hrvatske, p. 258.
[2] *R. E. Petermann:* Führer durch Dalmatien. Wien 1899. p. 151.
[3] *Fras:* O. c. p. 42 i 156.

Digitized by Google

pustno radi verfenskoga škrilja, u kojem leži.[1] Hacquetova vijest, da Zrmanjsko vrelo dobiva svoju vodu iz jezera, nekoliko sati udaljena, baš na bosanskoj granici, može se samo tako tumačiti, da je Hacquet dobio jedva pouzdane vijesti o Plavljanskom polju, što se diže 6 km. na I od vrela, na visini od 900 m., pa svoju vodu šalje u Zrmanju Starčevom dragom a poslije podzemno. Nješto na I od toga polja nastaje porječje Krke odn. potoka Tiskovca, koji teče usporedno sa Zrmanjom na J, a izvire mnogo sjevernije, sasma blizu vrela Kunovca Unina pritoka. Kod Kaldrme na granici bosanskoj stoji doduše t. zv. Veliko jezero, ali to je u svezi sa Tiskovcem od koga je daleko 1 km., a od vrela Zrmanje do jezera ima 16 km. Jednako podpada Malo Babića jezero pod porječje Krke, što je posve jasno iz same specijalne karte.

Zrmanja okreće odma poslije svoga vrela na J, pa slijedi smjer dosta plodne Zrmanjske doline, koju stisnuše sa Z Velebit, a sa I sjeverni ogranci Dinare,* što se nad dolinu podigoše 300 m. visokim, strmim stijenama. Pokraj gradine Rakovnika vijuga se brza Zrmanja na J krasnom, zelenom dolinom, koja po svojim klimatskim i vegetativnim prilikama spada u mediteransku klimatsku zonu. Velik se kontrast pokazuje u tom pogledu u dolini Une, koja ide od Popine na S.

Kod Zvonigrada ulazi Zrmanja u Zrmanjski klanac. Primiv neznatni pritok ***Močila*** s lijeve strane, prelazi preko granice kod Palanke, gdje tvori prve veće slapove.[2]

Smjer joj sada zakreće prema Z do Rvenika, a onda na SZ do Žegara. Tu joj se korito stisnulo med strme, šiljate i kojekako izderane stijene, koje podavaju svoj okolini do Novigradskoga mora osobit romantičan karakter. Sve do Žegara rijeka je dosta plitka, pa se da pregaziti; poslije do Obrovca naraste joj množina vode tako, da ima poprečnu širinu od 38 m.[3] Od Obrovca t. j.

[1] *Foetterle:* Geologische Uebersicht des I. Likaner Grenzregim. Jhbch. d. Geol. R. 1861/2. Stzb. p. 298.

* Svakako treba uzdržati mnijenje, da Poštak gora (tako *Franić:* Nastavni vjesnik II. p. 18) pripada Dinarskomu gorju. Prema tome bila bi sjeverna granica Dinare: Knin, klanac Zrmanjski, Mala Popina, Velika Popina, Srb, Radjenović, Trubarsko polje, Vaganj, 857, Grahovo polje i Livanjsko polje. Cesta iz Gračaca na Vel. Popinu dijeli Plišević od Velebita.

[2] *Fras:* O. c. p. 156.

[3] *Klaić:* Prirodni zemljopis, p. 258.

Digitized by Google

11 km. od mora nosi manje morske parobrode, pa je na čitavoj toj pruzi radi plime voda brakična, a pokazuju se kadšto slatkovodni virovi u duljini od 50 m. Razlog je tome svakako u njezinim pritocima, koji na sjevernoj strani Velebita poniru, pa utječu u Zrmanju u samom koritu ili pokraj njega. Od Obrovca do ušća prate je 100—200 m. visoke, najčudnovatije izderane crvenkaste stijene od vapnenca i prhke breccie; tu iznosi njezina dubina 2 m. Zrmanja do Obrovca obiluje slapovima; od njih je najljepši onaj, što se nalazi 3 km. nad tim mjestom, a prozvaše ga radi čudnoga oblika Polumjesecom.[1] Ispod gradine Pržinačke, koja se podigla na visokoj stijeni, utječe Zrmanja u Novigradsko more; ona se tu raširila do 240 m. a na svom ušću naslagala mulja do pol km. Od svega toka Zrmanjina t. j. od 67 km. otpada na Hrvatsku samo 12 km. t. j. tek $^1/_5$.

Lijevi su pritoci Zrmanje, osim već spomenutoga potoka ***Močila***, neznatne jaruge, koje su vodom pune samo za kiše. Mnogo su zanimljiviji desni pritoci, koji izviru na sjevernoj strani Velebita, pa ispod Velebita nalaze svoj tok.

Otuča (18 km. do ponora) izvire pod brdom Urlajem kod Bruvna na visini od 730 m., na brzo naraste tekući jednako k J uz Tomingaj i Deringaj, pa prima u Gračacu ***Bašinicu***. Ova izvire na istočnoj strani Reznika planine ispod Vodene glave, na visini od 800 m., pak primivši neka manje potoke, ulazi kod Rudopolja u Otuču iza toka od 15 km. — Otuča zakreće kod Gračaca na I, pa se gubi u tri ponora (546 m.), i to u ***Jabukovcu***, ***Sapinovcu*** i ***Kesića*** ponoru. Kako su ponori uski, ne mogu da svu vodu progutaju, kad nabuja, pa se događaju poplave.[2] Pripovijeda se pače, da se voda iz samih ponora vraća, a ima tih ponora osim ona tri veća još tri stotine manjih. Izbačena voda zna uništiti sav prirod, jer se do dva puta na godinu vraća i svagda poplavljuje tlo od 28.114 a.[3] — Iza podzemnoga toka (9.5 km. je upravni rastoj ponora i vrela) izlazi Otuča na južnom slazu Velebita na visini od 116 m. kao ***Krupa***[4] nad samostanom istoga imena. Najprije protječe malim poljem, gdje prima iz nutrine brda opet jako vrelo, a

[1] *R. E. Petermann:* O. c. p. 152.
[2] *Beyer:* Denkschrift, p. 10.
[3] *Fras:* O. c. p. 61 (nota).
[4] Otuča ne izlazi u Dabarnici (cf. *Franić:* Glasnik, XI., p. 145), što se vidi po udaljenosti i smjeru.

Digitized by Google

onda teče dosta velikim slazom (7,6 m. na 1000 m.) ravno na I, krećući se med visokim stijenama. Iza toka od 10 km. utječe u Zrmanju na visini od 40 m. kod Veselinovića. Ona je najjači pritok Zrmanjin, pa nosi toliko vode, koliko i Zrmanja, kad se sastanu. Kako kod glavne rijeke tako je i kod Krupe lijeva obala bezvodna a desna — velebitska — obiluje jakim vrelima.

Ričica (33 km. od izvora do ponora) drugi je pritok Zrmanjin. Njezino izvorište, nedaleko izvora Likina a posve ovomu slično, diže se iznad Raduča. Tu skuplja u proljeće i jesen vodu sa velebitskih dolina, pa teče onda na SI pokraj Raduča, gubi se u polju kao suha jaruga. Tek za kišna se vremena javlja 2 km. zapadno od Lovinca. Tu joj je tok brz, pa se zove Ričina, a niže, gdje nema tolika pada, zove se Ričica.[1]

Primivši kod Lovinca *Suvaju* (8 km.), što dolazi sa I s Reznika, ojača i okreće na JI sve do svojih ponora. Kod sela Ričice prima s desne strane *Crno vrelo*, a s lijeve strane, ispod Rujeve glave drugi, kratki ali jaki pritok. Došavši do Štikade razdvaja se u dva glavna traka, (u čem je slična Lici na Lipovu polju), od kojih prvi pada u *Našića ponor*, a drugi, dijeleći se opet, ponire pod imenom *Krivak* potok na visini od 544 m. u *Pojište*, *Gaćešin* i *Milićev* ponor, 4 km. sjeverno od Srnopasa.[2] Ričica čini sve od Lovinca pa do svoga ponora granicu izmedju Velebita i Reznika planine. Posljednja su dva ponora t. j. Pojište i Milićev radi velikih poplava spojeni kanalom, a Milićev ponor, koji je najjužniji, proširen je.[3] Na južnoj strani Velebita (upravni rastoj ponora i izvora 7,5 km.) izlazi Ričica kao *Dabarnica* na visini od kojih 20 m., teče odmah kao jak potok kilometar prema J, te utječe u Zrmanju 6 km. istočno od Obrovca.

U porječje Zrmanje spadaju nedvojbeno neki potoci, koji imaju posve usporedan tok sa Ričicom, poniru na sjevernoj strani Velebita. Od tih je najveći *Općenica* (do ponora 15,5 km.), koja izvire u Radučkoj dragi, pa idući smjerom SI izlazi u Ličko polje pod imenom *Radučice*, a primiv neznatni *Grginac*, okreće kod sv. Roka na JI kao Općenica i ponire na visini od 562 m. nješto na Z od vrha Pilara u *Vrkljanov ponor*.

[1] *Franić:* Ibid.

[2] Glede imena Srnopas ili Crnopac v. *Hirc:* Lika, gdje ima biti 1404 m., kako je na Sp. k. 28. XIV, a ne 1386 m., kako je na Sp. k. 28. XIII, pak *Rossi:* Hrv. planinar, III. p. 182.

[3] *Beyer:* O. c. p. 10.

Digitized by Google

Mnogo je manji ali predjašnjemu sličan potok *Krušnica*, što sa potokom *Prosinjakom* kao *Egejac*[1] ponire blizu ceste, koja vodi na Mali Alan, onda *Holjevac* potok, što protječe kroz mjesto Sv. Rok, pa nešto na Z od Vrkljanova ponora ulazi u ponor *Pećinu*.

Sve te ponornice mora da nalaze svoj ponovni izvor u onom redu vrela, što se redaju na desnoj obali Zrmanje izmed ušća Dabarnice i Obrovca. Kad na sjevernoj strani Velebita potoci narastu i poplavljuju, onda se opaža i na spomenutom dijelu Zrmanje, kako voda naraste.[2] Razumljivo je samo sobom, da ni Otuča ni Ričica a ni druge pomornice ne izviru ponovno na samom jednom mjestu, jer ne utječu u jedan ponor, nego da čine podzemne vodene mreže, koje se jamačno medjusobno vežu. Znamenito je i to, da se čitavi niz onih vrela, što se pokazivahu na morskoj obali (Bakar, obje Žrnovnice, Crnika, Vrulja, Dumboka, Bag itd.) od Novigradskoga mora, nastavljaju na desnom brijegu Zrmanje. To je najjasniji dokaz, da spomenute ponornice potpadaju u područje Zrmanje.

7. Krka.[3]

Od porječja Krke pripada Hrvatskoj vrlo malen dio, koji zatvara jedan dio pontsko-jadranske razvodnice i to od Lipovoga vrha (897 m.) preko Bogutovca (1000 m.), Panosa (1326 m.) do Jelovih tavana (1123 m.), pak dalje spomenuta već razvodnica Zrmanje, t. j. od Jelovih tavana preko Poštaka (1425 m.) i Konjske glave (1337 m.) na Plavljansko polje, gdje se hvata medje dalmatinske.

Ovaj dio porječja Krke zaprema 67,23925 km., a pošto čitavo porječje ima preko 2863 km.,[4] to na Hrvatsku otpada samo 2,3% cijeloga porječja.

Hrvatskim porječjem Krkinim teče potok *Tiskovac* (15 km. u Hrvatskoj), koji izvire ispod Panosa na visini od 1000 m. kao *Draganački potok*. Dubokom dolinom sa strmim slazovima, što se prema S otvara izmedju Jelovih tavana i Sekulina vrha, teče taj potok na S, a onda obilazi spomenuti Sekulin vrh, pa kod Kaldrme prima ime Tiskovac, i postaje medjašnim potokom. Za kišna vremena prima odvirak *Velikoga jezera*, što se je nješto na sjever od kuka

[1] *Franić:* Ibid.
[2] *Fras:* O. c. p. 42.
[3] Sp. k.: 29. XIV.
[4] *Klaić:* Prirodni zemljopis Hrvatske, p. 259.

Digitized by Google

Tiskovčeva položilo u širokoj dolini. Za suha je vremena to jezero *izolirano*, pa mu se onda površina znatno stegne. Ono prima samo jedan neznatan pritok sa Z; u obično vrijeme ima promjer od 250 m. Od kuka zakreće Tiskovac ravno na I, prima neke manje pritoke, gdje i gdje mu je korito zatvoreno strmim bregovima, a onda mu se opet dolina proširuje . Kako potok teče na verfenskim škriljevima, to okolica ni najmanje ne opominje na kršni karakter.[1] Primivši maleni potok *Babića* jezero,[2] što se je na Z. od sela Tiskovca uvalilo na visini od 634 m. medju šumovite strane, i *Prosjek* potok (s desne strane), izlazi kod Drenovca iz Hrvatske.

[1] *Foetterle*: Geol. Uebersicht des I. Lik. Grenzreg. Jhb. Geol. R. 1861/2. p. 298.

[2] *Beyer*: Denkschrift, p. 12.

Digitized by Google

Jedno pitanje iz teorije funkcija sa dvjema nezavisno promjenljivim količinama.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. prosinca 1900.

Napisao član dopisnik Mihailo Petrović,
prof. Velike škole u Biogradu.

Neka je data funkcija

$$F(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

što zavisi od više nezavisno promjenljivih količina $x, y, z, \ldots$ i neka je $x_0, y_0, z_0, \ldots$ takav jedan skup vrijednosti tih promjenljivih, da je

$$F(x_0, y_0, z_0, \ldots) \lesseqgtr 0$$

Tada je mogućno oko tačaka $x_0, y_0, z_0 \ldots$ u brojnoj ravni opisati krugove $A, B, C, \ldots$ konačnih ili beskonačnih, ali od nule različnih poluprečnika, sa centrima u tim tačkama, a koji će biti takvi da, dok se x kreće u unutrašnjosti kruga A, y u unutrašnjosti kruga B, z u unutrašnjosti kruga C itd., bude neprestano

$$F(x, y, z, \ldots) \lesseqgtr 0$$

ma kakav bio položaj tačaka $x, y, z, \ldots$ u tim krugovima.

U izvjesnim pitanjima od važnosti je umjeti odrediti takve krugove $A, B, C, \ldots$ opisane sa što je mogućno većim poluprečnicima, a da se ipak može tvrditi da imaju gornju osobinu, t. j. da funkcija F nikako ne postaje ravna nuli, dok se tačke $x, y, z, \ldots$ kreću u tim krugovima.

Digitized by Google

Tako pri integraciji diferencijalnih jednačina prvoga reda

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

pomoću beskrajnih redova, da bi se mogla odrediti oblast konvergencije takvoga reda, potrebno je na prvome mjestu znati u kojim se krugovima, opisanim oko početnih tačaka $x = x_0$, $y = y_0$, mogu kretati tačke x i y, pa da funkcija $F(x, y)$ ostane neprestano holomorfna. A ovo se pitanje, kao što je poznato, uvijek svodi na jedan zadatak ove vrste o kojoj je ovdje riječ.

Na isti se zadatak nailazi n. pr. i pri traženju pogodaba, pod kojima će kakav krivolinijski integral

$$\int F(z, \alpha, \beta, \gamma \ldots .)\, dz$$

uzet duž kakve konture u ravni kompleksne količine z, biti holomorfna funkcija parametara α, β, γ . . . . itd.

Kod funkcija $F(x)$, što zavise samo od jedne nezavisno promjenljive količine, zadatak se može svesti na određivanje donje granice pozitivnih ili gornje granice negativnih realnih korijena izvjesne jednačine. Jer ako se stavi da je

$$x = x_0 + \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

funkcija F imaće oblik

$$F_1(\rho, \theta) + i F_2(\rho, \theta)$$

i biće ravna nuli samo ako je posebice u isto vrijeme

$$F_1(\rho, \theta) = 0, \qquad F_2(\rho, \theta) = 0$$

Eliminacijom promjenljive θ iz ovih dviju jednačina imali bismo n. pr.

$$\Phi(\rho) = 0$$

Neka je μ donja granica pozitivnih korijena ove posljednje jednačine; ako je

$$F(x_0) \lesseqgtr 0$$

Digitized by Google

za sve vrijeme dok se x kreće u krugu, opisanom oko tačke $x = x_0$ sa poluprečnikom ϱ, biće neprestano

$$F(x) \lesseqgtr 0.$$

Ali zadatak postaje znatno složeniji kad se ima posla sa funkcijama $F(x)$, što zavise od dviju promjenljivih količina x, y i kad za svaku od ovih valja odrediti krug što većeg poluprečnika, opisan oko datih početnih tačaka $x = x_0$, $y = y_0$, koji bi imao sprijed navedene osobine. Među tim zadatak je baš za taj slučaj od interesa u raznovrsnim praktičnim primjenama općih teorija.

Metoda, koju ovdje navodim za njegovo rješavanje sasvim je elementarna, osnovana na jednoj prostoj algebarskoj primjedbi i u velikome broju slučajeva rješava na lak način postavljeni zadatak.

Stavimo da je

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ y &= y_0 + \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \end{aligned}$$

pa će funkcija F postati

$$(3) \qquad F(x, y) = M + Ni$$

gdje su M i N realni i imaginarni dio te funkcije; oni će zavisiti od r, ρ, φ, ϑ.

Da bi bilo $F = 0$, mora biti posebice

$$(4) \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Eliminacijom jednoga od argumenata φ ili ϑ, n. pr. argumenta φ, iz jednačina (4) dobija se izvjesna jednačina

$$(5) \qquad \Phi(r, \rho, \vartheta) = 0.$$

Stavimo da je

$$(6) \qquad \lambda = \cos(m\vartheta + n)$$

gdje su m i n dva realna broja, izabrana tako, da jednačina (5) dobije što je moguće prostiji oblik i neka je

$$(7) \qquad \Psi(r, \rho, \lambda) = 0$$

tako dobijena jednačina.

Digitized by Google

Zamislimo povučene dvije među sobom upravne koordinatne osi or i $o\varrho$ i smatrajmo r i ϱ kao koordinate jedne pokretne tačke u ravni tih osi. Lako je uvjeriti se da u ravni $ro\varrho$ postoji jedna oblast Δ, ograničena ili neograničena, koja obuhvaća i koordinatni početak $r = 0$, $\rho = 0$ i koja ima tu osobinu, da ni za koju njenu tačku P (r, ϱ) jednačina (7), riješena po λ, nema realnih korijena, čije bi vrijednosti ležale između -1 i $+1$.

Da bismo to dokazali, primijetimo da za tačku $r = 0$, $\rho = 0$ jednačina (7) ne može imati nikakav konačan korijen po λ. Jer kad bi λ_1 bio jedan takav korijen, realan ili imaginaran, jednačine (4) riješene po φ imale bi za

$$r = 0, \qquad \rho = 0$$

$$\theta = \frac{1}{m}(\arccos \lambda_1 - n)$$

bar jedan konačan zajednički korijen, n. pr. φ_1, realan ili imaginaran. Tada bi prema jednačini (3) funkcija $F(x, y)$ morala biti ravna nuli za

$$r = 0, \ \rho = 0, \ \varphi = \varphi_1$$

$$\theta = \frac{1}{m}(\arccos \lambda_1 - n)$$

Ali za takve vrijednosti, prema jednačinama (2) dobija se da je

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

i po tome bi bilo

$$F(x_0, y_0) = 0$$

što je suprotno predpostavci da su x_0 i y_0 par takvih vrijednosti promjenljivih x i y, da je vrijednost $F(x_0, y_0)$ različna od nule.

Dakle za koordinatni početak $r = 0$ $\rho = 0$ jednačina (7) može imati samo bezkrajno velikih korijena po λ. Ako pustimo da r i ρ rastu počevši od nule u pravcu pozitivnih vrijednosti, korijeni λ jednačine (7) postaće konačni, ali u prvi mah očevidno svi po modulima veći od $+1$, čime je dokazana egzistencija oblasti Δ.

Određivanje granica te oblasti biva tražeći, po upustvima algebre, potrebne i dovoljne uslove da jednačina (7) riješena po λ ne bi

Digitized by Google

imala ni jedan realan korijen, čija bi vrijednost ležala između -1 i $+1$.

Tako, ako se jednačina može riješiti po λ, tako da je

$$\lambda = \varphi(r, \rho)$$

i ako je za vrlo male pozitivne vrijednosti r i ρ funkcija φ pozitivna, oblast Δ biće ona, za koju je

$$\varphi(r, \rho) > 1$$

Tada bi valjalo konstruovati krivu

$$\varphi(r, \rho) - 1 = 0$$

pa će oblast Δ biti pozitivna oblast te krive.

Ako je pak za vrlo male pozitivne vriednosti r i ρ funkcija φ negativna, oblast Δ biće ona, za koju je

$$\varphi(r, \rho) < -1;$$

to će biti negativna oblast krive

$$\varphi(r, \rho) + 1 = 0$$

Na posljetku, ako $\varphi(r, \rho)$ za male pozitivne vrijednosti r i ρ ima više suprotno označenih vrijednosti. od kojih su n. pr.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_p$ pozitivne
$\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_p$ negativne,

oblast Δ biće zajednički dio pozitivnih oblasti krivih linija

$$\varphi_1(r, \rho) - 1 = 0$$
$$\varphi_2(r, \rho) - 1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i negativnih oblasti krivih linija

$$\psi_1(r, \rho) + 1 = 0$$
$$\psi_2(r, \rho) + 1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

U svima ovim slučajevima, pošto r i ϱ moraju biti pozitivni treba za Δ uzeti samo onaj dio te oblasti, što se nalazi u kvadrantu, u kome su obje koordinate pozitivne.

Ako se jednačina (7) ne može riješiti po λ, primjenom Sturmove ili druge koje poznate metode, mogu se naći potrebni i dovoljni uslovi da ta jednačina ne bi imala ni jedan realan korijen između granica -1 i $+1$. Ti će uslovi biti izraženi u obliku izvjesnih nejednakosti između r i ϱ, koje definuju izvjesne oblasti u ravni (r, ϱ). Zajednički dio tih oblasti i kvadranta ravni $or\varrho$, u kome su obje koordinate pozitivne, biće tražena oblast Δ, koja će prema onome, što je sprijed navedeno obuhvatati i tačku $r = 0$, $\varrho = 0$ i čija je egzistencija u napred osigurana.

Ako su $r = r_1$ i $\varrho = \varrho_1$ koordinate jedne ma koje tačke u oblasti Δ, onda za vrijeme, dok se tačka x kreće u krugu, opisanom u njenoj ravni oko tačke x_0 sa poluprečnikom r_1, a tačka y u krugu opisanom u njenoj ravni oko tačke y_0 sa poluprečnikom ϱ_1, vrijednost funkcije $F(x, y)$ ne može nikako postati ravna nula.

Jer dok r raste od 0 do r_1, ϱ od 0 do ϱ_1, jednačina (7) riješena po λ nema ni jedan korijen, čija bi vrijednost ležala između -1 i $+1$; prema tome za argumenat θ, definovan jednačinom

$$\theta = \frac{1}{m}(\arccos \lambda - n)$$

ne može se dobiti nikakva realna vrijednost. To znači da jednačine (4) nemaju zajedničkih realnih riješenja. pa dakle da je nemoguće da bude

$$F(r, y) = 0$$

Time je riješen postavljeni zadatak. Tačku (r, ϱ_1) u oblasti Δ valja izabrati prema drugim kakvim uslovima zadatka. Može se n. pr. tražiti da poluprečnik r_1 bude što je moguće veći, ili se to može tražiti za poluprečnik ϱ_1, prema čemu će se i izabrati tačka (r_1, ϱ_1). Može se tražiti da r_1 i ϱ_1 budu jednaki i što je moguće veći. Tada valja u oblasti Δ upisati kvadrat, čija će se jedna strana poklapati sa osi or, druga sa osi $o\varrho$, a tjeme prema ovim stranama ležati na graničnoj liniji nadene oblasti Δ. Koordinate toga tjemena tada će zadovoljavati traženi uslov.

Primijenimo ovu metodu na koji primjer.

Digitized by Google

I. primjer: neka je

$$F(x, y) = ax + by + c$$

gdje su a, b, c stalne količine. Stavimo da je

$$x = x_0 + r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
$$y = y_0 + \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

gdje su n. pr. x_0 i y_0 realni dobija se

$$F'(x, y) = ax_0 + by_0 + ra\cos\varphi + \rho b\cos\theta + c + i(ra\sin\varphi + \rho b\sin\theta)$$

Jednačine (4) ovdje su

$$h + ra\cos\varphi + \rho b\cos\theta = 0$$
$$ra\sin\varphi + \rho b\sin\theta = 0$$

gdje je kratkoće radi stavljeno da je

$$h = ax_0 + by_0 + c$$

i prema tome je

$$h \lessgtr 0$$

Iz posljednjih se jednačina eliminacijom argumenta φ dobija jednačina.

$$a^2r^2 - b^2\rho^2 - 2bh\rho\cos\theta - h^2 = 0$$

odakle je

$$\lambda = \cos\theta = \frac{a^2r^2 - b^2\rho^2 - h^2}{2bh\rho}$$

Kad r i ρ imaju vrlo male pozitivne vrijednosti, λ će imati vrlo veliku negativnu ili pozitivnu vrijednost, prema tome da li su b i h istoga znaka ili su suprotno označeni.

U prvome slučaju oblast Δ biće negativna oblast linije

$$a^2r^2 - (b\rho - h)^2 = 0$$

Digitized by Google

koja se raspada na dvije prave

$$ar - b\rho + h = 0$$
$$ar + b\rho - h = 0$$

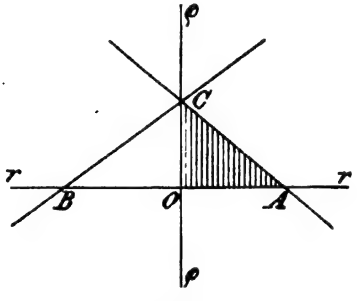
U drugome slučaju ta će oblast biti pozitivna oblast linija

$$a^2r^2 - (b\rho + h)^2 = 0$$

koja se raspada na dvije prave

$$ar + b\rho + h = 0$$
$$ar - b\rho - h = 0$$

Prave što ograničavaju oblast Δ imaće položaj označen u sl. 1.



Sl. 1.

gdje je

$$BO = \frac{h}{a} = OA, \qquad OC = \frac{h}{b}$$

i gdje precrtani dio ravni prikazuje traženu oblast Δ.

II. primjer: neka je

$$F(x, y) = ax + by^2 + c$$

a

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$

U polarnim koordinatama biće

$$F(x, y) = ra\cos\varphi + b\rho^2\cos 2\vartheta + c + i\,(ra\sin\varphi + b\rho^2\sin 2\vartheta,$$

Digitized by Google

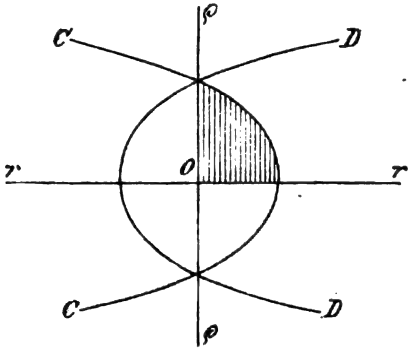
Stavivši da su realni i imaginarni dijelovi posebice ravni nuli i eliminujući argumenat φ, dobija se jednačina

$$a^2r^2 - b^2\rho^4 - 2bc\rho^2 \cos 2\vartheta = c^2$$

iz koje je

$$\lambda = \cos 2\vartheta = \frac{a^2r^2 - b^2\rho^4 - c^2}{2bc\rho^2}$$

Za vrlo male pozitivne vrijednosti r i ρ imat će λ vrlo veliku negativnu ili pozitivnu vrijednost, prema tome da li su b i c istoga znaka ili su suprotno označeni. U oba slučaja oblast Δ biće prečrtani dio ravni u sl. 2., gdje su krive C i D parabole definovane jednačinama



Sl. 2.

$$ar - b\rho^2 + c = 0$$
$$ar + b\rho^2 - c = 0$$

ili jednačinama

$$ar - b\rho^2 - c = 0$$
$$ar + b\rho^2 + c = 0$$

prema tome da li je prvi ili drugi slučaj.

Pitanje, o kome je ovdje bila riječ, javlja se pri integraciji diferencijalnih jednačina prvoga reda

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8}$$

pomoću beskrajnih redova. Ako su $x = x_0$ i $y = y_0$ date početne vrijednosti promjenljivih x, y i ako je funkcija $f(x, y)$ holomorfna

Digitized by Google

za taj par vrijednosti, integral y jednačine (8), koji za $x = x_0$ ima vrijednost $y = y_0$, može se razviti u red oblika

$$y = y_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

koji će biti konvergentan za sve vrijednosti promjenljive x, što se nalaze u jednom izvjesnom krugu, opisanom oko tačke $x = x_0$ kao središta. Za određivanje poluprečnika R ovoga kruga konvergencije potrebno je znati kolikih se poluprečnika krugovi mogu opisati oko tačaka $x = x_0$ i $y = y_0$ u njihovim odgovarajućim ravnima, a da za sve vrijeme, dok x i y variraju u tim krugovima, funkcija $f(x, y)$ ostaje neprestano holomorfna. Jer, kao što se zna iz analitične teorije diferencijalnih jednačina (8), poluprečnik R biće ili ravan najmanjoj od vrijednosti

$$r, \qquad \frac{\rho}{M}$$

ili veći od ove, gdje r i ρ označuju poluprečnike krugova opisanih oko tačaka $x = x_0$, $y = y_0$, koji imaju tu osobinu da dok se x i y kreću po njihovoj unutrašnjosti, funkcija $f(x, y)$ ostaje neprestano holomorfna; M označuje najveći moduo, koji funkcija f dobija za vrieme, dok se x i y kreću u tim krugovima. Među tim vrijednosti x i y, za koje funkcija f prestaje biti holomorfna zadovoljavaju uvijek kakvu jednačinu

$$\Phi(x, y) = 0$$

koja može sadržavati ili jednu ili obje od nepoznatih x i y. Ova jednačina ne može biti zadovoljena parom vrijednosti $x = x_0$, $y = y_0$, pošto bi onda za taj par funkcija $f(x, y)$ prestala biti holomorfnom, a ovo bi bilo u opreci sa učinjenom pretpostavkom.

Prema tome u ravnima promjenljivih x i y postoje dva kruga opisana oko tačaka $x = x_0$, $y = y_0$, u čijoj unutrašnjosti kad se nalaze x i y, funkcija $\Phi(x, y)$ ima vrijednosti uvijek različne od nule. Određivanje tih poluprečnika podudara se upravo sa pitanjem, o kome je sprijed govoreno.

N. pr. za jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

gdje su P i Q polinomi po x i y, funkcija $\Phi(x, y)$ biće $Q(x, y)$.

Digitized by Google

Za jednačinu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x)$$

gdje je $f(x)$ kakva holomorfna funkcija, funkcija će Φ biti

$$f(x) - y^2;$$

Za jednačinu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\,\frac{dy}{dx} + \varphi(x, y) = 0$$

biće

$$\Phi = \left[f(x, y)\right]^2 - 4\varphi(x\,y) \qquad \text{itd.}$$

Digitized by Google

Transcendentne transformacije algebarskih jednačina.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. prosinca 1900.

Napisao član dopisnik Mihailo Petrović,
prof. Velike škole u Biogradu.

Problem transformacije algebarskih jednačina, koji se sastoji u tome, da se kad je data kakva jednačina

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

obrazuje druga jednačina

$$\varphi(y) = 0 \tag{2}$$

koja će biti takva, da izmedju korijena

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots$$

jednačine (1) i korijena

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots$$

jednačine (2) postoji kakva u naprijed data relacija

$$\Phi(\beta_i, \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \ldots) = 0 \tag{3}$$

rješava se raznim poznatim metodama, koje se u osnovi svode na eliminaciju promjenljivih α_i, α_j, α_k, ... iz sistema jednačina

$$\Phi(y, \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \ldots) = 0$$

$$f(\alpha_i) = 0, \qquad f(\alpha_j) = 0, \qquad f(\alpha_k) = 0, \text{ itd.}$$

Digitized by Google

Ako je relacija (3) algebarska, jednačina (2) kao rezultanta te eliminacije biće također algebarska.

Ali ako je pomenuta relacija transcendentna i jednačina (2), dobijena na pomenuti način, biće očevidno transcendentna.

Među tim dešava se, da je broj korijena jednačine (2), i ako je ova transcendentna, ipak ograničen. Tada postoji izvjesna algebarska jednačina

$$\psi(y) = 0 \tag{4}$$

koja ima iste korijene i istoga reda, koje i jednačina (2). U takvome slučaju ova se jednačina (4) može smatrati kao transformovana jednačina (1), a transcendentna relacija (3) određuje prirodu izvršene transformacije.

Tako, ako se sa algebarskom jednačinom (1) izvrši transformacija

$$x = arc\ sin\ y$$

dobija se transcendentna jednačina

$$f(arc\ sin\ y) = o \tag{5}$$

koja je takva, da između njenih korena β_i i korijena α_i prvobitne jednačine (1) postoji relacija

$$\beta_i = sin\ \alpha_i \tag{6}$$

Jednačina (5) riješena po y imaće dakle onoliko isto korijena koliko i prvobitna jednačina (1) i redovi tih korijena biće isti u obe ove jednačine. Prema tome izvjesno postoji jedna algebarska jednačina istoga stepena, koga i jednačina (1), koja će imati za korijene vrijednosti β_1, β_2, β_3 .... definovane jednačinom (6) i koja se može smatrati kao transformovana jednačina (1).

U koliko mi je poznato do sad još nije rješen ni jedan problem ove vrste: izvršiti sa datom algebarskom jednačinom kakvu transcendentnu transformaciju, ali tako da transformovana jednačina ipak bude algebarska, razumije se u slučaju kad takav problem u opće ima smisla.

U ovome će radu biti pokazano, kako se može riješiti nekoliko takvih problema, a na ime problemi ove vrste:

Kad je data algebarska jednačina (1) obrazovati novu algebarsku jednačinu (2), koja će biti takva, da između korijena α_i prve i

Digitized by Google

korijena β_i druge jednačine postoji kakva u naprijed data relacija oblika

$$\beta_i = R(e^{r\alpha_i}, e^{r\alpha_j}, \ldots .)$$

ili

$$\beta_i = R(\sin r\alpha_i, \sin r\alpha_j, \ldots .)$$

ili

$$\beta_i = R(\cos r\alpha_i, \cos r\alpha_j, \ldots)$$

ili u opće

$$\beta_i = R(u_i, u_j, \ldots)$$

gdje je u_k ma kakva trigonometrijska funkcija korijena α_k a R označuje kakvu algebarsku. racionalnu i simetričnu funkciju onih izraza što se u njoj javljaju.

Prije svega lako se uviđa, da se svi problemi ove vrste mogu pomoću Euler-ovih obrazaca svesti na ovaj jedan, mnogo prostiji, u kome i leži sva teškoća: izvršiti sa datom jednačinom (1) takvu transformaciju da bude

$$\beta_i = e^{r\alpha_i}$$

i da nova, tako dobijena jednačina bude algebarska. Jer kad bi ovaj problem bio riješen, gornji bi se komplikovaniji problemi sveli na to, da se obrazuje jednačina, čiji bi korijeni bili izvjesne u naprijed date racionalne i simetrične funkcije korijena date jednačine, a ovo se rješava poznatim elementarnim putem.

Zadržimo se na malo čas pomenutom prostijem problemu. Neka je

$$(7) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

data prvobitna jednačina a

$$(8) \qquad y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

iz nje izvedena jednačina transformacijom

$$y = e^{rx}.$$

Sačinioci $b_1, b_2 \ldots b_n$ tražene jednačine (8) zavise od sačinilaca $a_1, a_2 \ldots a_n$ date jednačine (7) i mogu se izračunati kad su te

Digitized by Google

količine date. Ovdje će biti pokazano kako se to izračunavanje može svesti na izvjesne ostvarljive algebarske operacije i na izračunavanje n određenih integrala, tako da je svaki od tih sačinilaca prestavljen po jednim takvim integralom.

Sačinioci b_i mogu se izračunati i u obliku beskonačnih redova, uređenih po stepenima od r i to svaki sa onolikom aproksimacijom, kolika se bude tražila

Određeni integrali, na koje se, kao što će biti pokazano, može svesti izračunavanje tih sačinilaca, oblika su

$$\int_0^\infty \chi(x) \cos rx \, dx$$

gdje je $\chi(x)$ izvjesna racionalna funkcija promjenljive x, koja ima stalan znak za sve vrijednosti x-a u granicama integracije i neprekidno opada kad x raste između tih granica počevši od izvjesne vrijednosti. Za takve integrale može se postaviti jedna naročita metoda približnog izračunavanja, pomoću koje bi se mogli izračunavati sa kolikom se hoće aproksimacijom.

Jedna značajna osobina tako transformovane algebarske jednačine, pomoću koje se, kao što će biti pokazano, kad je ona već obrazovana može na veoma prost način odrediti broj korijena prvobitne jednačine, što se u brojnoj ravni nalaze se jedne ili druge strane jedne date prave linije, daje naročitu važnost ovakvoj vrsti transcendentnih transformacija. S toga bi bilo od interesa naći za njihovo izvođenje prostije metode od ovih, koje će obje biti iznesene i koje ma da svode zadatak na obične, ostvarljive algebarske i integralne operacije, ipak su u praktici zamjetne i zahtijevaju duga računanja. Metoda, koja će ovdje biti izložena, zaslužuje pažnje s toga, što je ona do sada jedina metoda, pomoću koje se može izvršiti kakva transcendentna transformacija algebarskih jednačina.

I. O jednome određenom integralu.

Određeni integral

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \tag{9}$$

Digitized by Google

jedan je od poznatih integrala. Poznato je i lako se dokazuje da kad je λ realan a a realan i pozitivan broj, integral ima vrijednost

$$I(a) = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a} \qquad \text{ako je } \lambda > 0$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2a} e^{\lambda a} \qquad \text{ako je } \lambda < 0$$

Odavle neposredno izlazi, da kad su r i a realne količine izraz e^{ra} može se prestaviti u obliku

$$e^{ra} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + a^2}\, dx \qquad \text{ako je } r < 0 \; a > 0$$

$$e^{ra} = -\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + a^2}\, dx \qquad \text{ako je } r > 0 \; a < 0$$

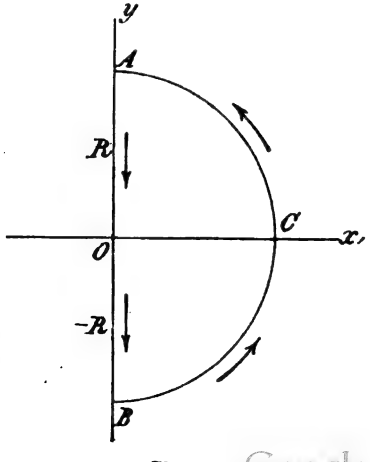
Ja ću ovdje prije svega pokazati kako se ovaj rezultat može proširiti i na općiji slučaj kad je a ma kakva kompleksna a r ma kakva realna količina.

Toga radi razlikujmo ova četiri slučaja:

Prvi slučaj: $\lambda > 0$, $R(a) > 0$ (gdje $R(a)$ po uobičajenom obilježavanju označuje realni dio kompleksnog broja a). Uočimo krivolinijski integral

$$(10) \qquad P = \int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z - a}\, dz$$

uzet u ravni kompleksnih količina duž konture $BCAOB$, sastavljene iz polukruga BCA i odsječka AB imaginarne osi, kad se ta kontura opisuje u pravcu, koji je označen strijelicama (sl. 1).



Sl. 1.

Ako je poluprečnik R polukruga dovoljno veliki da opisana kontura opkoljava tačku $z = a$, koja se

Digitized by Google

nalazi na desnoj strani osi AB, prema osnovnoj Cauchy-evoj teoremi biće

$$\int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z-a} dz = 2\pi\sqrt{-1}\, e^{-\lambda a}; \tag{11}$$

a pošto kontura, pa ma koliki bio poluprečnik R, ne opkoljava tačku $z=-a$, jer je ova na lijevoj strani osi AB, to će biti

$$\int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z+a} dz = 0 \tag{12}$$

Oduzimanjem jednačine (12) od (11) dobije se da je

$$\int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z^2-a^2} dz = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a} e^{-\lambda a} \tag{13}$$

Sa druge strane integral (13) sastoji se iz zbira dvaju integrala P_1 i P_2, od kojih je prvi uzet duž polukruga BCA, a drugi duž odsiječka AB, tako da je

$$(13) = P_1 + P_2 \tag{14}$$

Za prvi je integral

$$z = R e^{\theta\sqrt{-1}}$$

gdje argumenat θ varira od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$ je i prema tome

$$P_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R e^{-R\lambda e^{\theta\sqrt{-1}}} e^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{R^2 e^{2\theta\sqrt{-1}} - a^2} d\theta \tag{15}$$

a za drugi je $z = y\sqrt{-1}$, gdje y varira od R do $-R$ i otuda je

$$P_2 = -\int_{R}^{-R} \frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}{y^2+a^2} dy \tag{16}$$

Digitized by Google

Zadržimo se najprije na integralu P_1. Moduo količine pod integralnim znakom biće

$$\frac{R\,e^{-R\lambda\cos\theta}}{\sqrt{R^4+a^4-2R^2a^2\cos\theta}}$$

a pošto, dok θ varira od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ ostaje pozitivan, to kad se pusti da R beskonačno raste, integral P_1 teži nuli. Prema tome i prema obrascu (14) napisanom u obliku

$$P_1+P_2=\frac{\pi\sqrt{-1}}{a}e^{-\lambda a}$$

koji važi za ma kakvo R pa i za $R=\infty$, dobija se da je

$$P_2=\sqrt{-1}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2+a^2}\,dy=\frac{\pi\sqrt{-1}}{a}\,e^{-\lambda a}$$

ili

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2+a^2}\,dy=\frac{\pi}{a}e^{-\lambda a} \tag{17}$$

Izmjenimo

$$e^{-\lambda y\sqrt{-1}}=\cos\lambda y-\sqrt{-1}\sin\lambda y$$

i razdvojmo u dobijenom rezultatu realni i imaginarni dio, pa se dobija

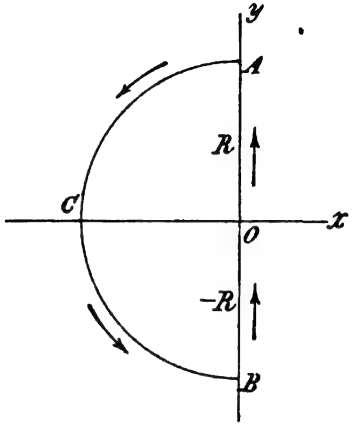
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{y^2+a^2}\,dy=\frac{\pi}{a}\,e^{-\lambda a}$$

odakle je na posljetku, pošto je funkcija pod integralnim znakom parna,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\lambda y}{y^2+a^2}\,dy=\frac{\pi}{2a}\,e^{-\lambda a} \tag{18}$$

Digitized by Google

Drugi slučaj: $\lambda < 0$, $R(a) < 0$. Uočimo opet krivolinijski integral



Sl. 2.

$$P = \int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z - a}\, dz$$

ali uzet duž konture $BOACB$ u smislu, koji je na slici 2. označen strijelicama. Ako je poluprečnik polukruga dovoljno veliki da kontura obuhvata tačku $z = a$, biće

$$(19) \qquad P = 2\pi\sqrt{-1}\, e^{-\lambda a}$$

a pošto kontura tada ne obuhvata tačku $z = -a$ (čiji je realni dio pozitivan) to će biti

$$(20) \qquad \int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z + a}\, dz = 0$$

Oduzimajući (20) od (19) dobija se da je

$$(21) \qquad \int_{(c)} \frac{e^{-\lambda z}}{z^2 - a^2}\, dz = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a}\, e^{-\lambda a}$$

Integral na lijevoj strani sastoji se iz dva dijela Q_1 i Q_2, od kojih je jedan uzet duž odsečka BOA a drugi duž polukruga.

Za prvi je $z = y\sqrt{-1}$, gdje y varira od $-R$ do R i prema tome

$$(22) \qquad Q_1 = -\sqrt{-1} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2 + a^2}\, dy$$

Za drugi je

$$z = R\, e^{\theta\sqrt{-1}}$$

gdje θ varira od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$ i prema tome je

Digitized by Google

$$Q_2 = R\sqrt{-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-\lambda R e^{\vartheta\sqrt{-1}}} e^{\vartheta\sqrt{-1}}}{R^2 e^{2\vartheta\sqrt{-1}} - a^2}\, d\vartheta$$

Pošto dok ϑ varira u granicama integracije $\cos\vartheta$ ostaje negativan, to moduo količine pod integralnim znakom teži nuli kad R beskonačno rasti; prema tome je

$$\lim Q_2 = 0 \qquad \text{za} \qquad R = \infty$$

i na osnovu obrasca

$$Q_1 + Q_2 = \frac{\pi\sqrt{-1}}{a} e^{-\lambda a}$$

dobija se da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda y\sqrt{-1}}}{y^2 + a^2}\, dy = -\frac{\pi}{a} e^{-\lambda a}$$

Zamijenivši kao i malo čas

$$e^{-\lambda y\sqrt{-1}} = \cos\lambda y - \sqrt{-1}\sin\lambda y$$

i razdvojivši realni i imaginarni dio, dobija se obrazac

$$(23) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda y}{y^2 + a^2}\, dy = -\frac{2a}{\pi} e^{-\lambda a}$$

Treći slučaj: $\lambda > 0$, $R(a) < 0$. Neka je ρ kakav realan i pozitivan broj ili kompleksan broj čiji je realan dio pozitivan i veći od apsolutne vrijednosti $R(a)$. Tada će biti

$$R(\rho + a) > 0$$

i prema tome

$$(24) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda y}{y_2 + (\rho + a)^2}\, dy = \frac{\pi}{2(\rho + a)} e^{-\lambda(\rho + a)}$$

Digitized by Google

Četvrti slučaj: $\lambda < 0$, $R(a) > 0$. Neka je ω kakav realan ili kompleksan broj takav da je

$$R(\omega + a) < 0$$

tada će (2. slučaj biti

$$(25) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos \lambda y}{y^2 + (\omega + a)^2} dy = -\frac{\pi}{2(\omega + a)} e^{-\lambda(\omega + a)}$$

Iz obrazaca (18), (23), (24) i (25) izvodi se ovaj zaključak:

Neka je x kakva kompleksna a r kakva realna količina; izraz e^{rx} uvijek se može izraziti pomoću jednog određenog integrala oblika

$$\int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + x^2} dx$$

i to na ovaj način:

1. ako je $r > 0$, $R(x) < 0$ biće (sluč. 2.)

$$(26) \qquad e^{rx} = -\frac{2x}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + x^2} dx$$

2. ako je $r < 0$, $R(x) > 0$ (sluč. 1.) biće

$$(27) \qquad e^{rx} = \frac{2x}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + x^2} dx$$

3. ako je $r > 0$, $R(x) > 0$ (sluč. 4.) biće

$$(28) \qquad e^{rx} = -\frac{2(\omega + x)}{\pi} e^{-r\omega} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + (\omega + x)^2} dx$$

gdje je ω takav jedan broj, da je

$$R(\omega + x) < 0$$

Digitized by Google

4. ako je $r < 0$, $R(\alpha) < 0$ (sluč. 3.) biće

$$(29) \qquad e^{r\alpha} = \frac{2(\rho+\alpha)}{\pi} e^{-r\rho} \int_0^\infty \frac{\cos rx}{x^2 + (\rho+\alpha)^2} dx$$

gdje je ρ ma kakav broj za koji je

$$R(\rho+\alpha) > 0$$

II. Riješenje postavljenog zadatka transformacije pomoću određenih integrala.

Vratimo se zadatku istaknutom u početku ove rasprave i koji se sastoji u ovome: kad je data algebarska jednačina n-tog stepena

$$(30) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

obrazovati drugu algebarsku jednačinu također n-tog stepena

$$(31) \qquad z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0$$

koja će biti takva, da su korijeni jednačine (30) srazmjerni logaritmima odgovarajućih korijena jednačine (31), i gdje je koeficijenat te proporcionalnosti kakav u naprijed dat realan broj r.

Neka su

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ korijeni jednačine (30)
$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ korijeni jednačine (31)

pa će prema uslovu zadatka biti

$$\beta_1 = e^{r\alpha_1}, \qquad \beta_2 = e^{r\alpha_2}, \quad \ldots \quad \beta_n = e^{r\alpha_n}$$

Razlikujmo ova dva slučaja:

Prvi slučaj: $r > 0$. Neka je ω takav jedan realan ili kompleksan broj, da su realni dijelovi sviju količina

$$\omega + \alpha_1, \qquad \omega + \alpha_2, \quad \ldots \quad \omega + \alpha_n$$

Digitized by Google

negativni. Ako se sa jednačinom (30) izvrši transformacija

$$x = y - \omega \tag{32}$$

rezultat će biti izvjesna algebarska jednačina n-tog stepena

$$\Phi_1 (y) = 0 \tag{33}$$

čiji će svi korijeni imati negativne realne dijelove
Obrazujmo za tim jednačinu

$$\Phi_2 (y) = 0 \tag{34}$$

čiji bi korijeni bili zbirovi od dva korijena jednačine (33); za tim jednačinu

$$\Phi_3 (y) = 0 \tag{35}$$

čiji bi korijeni bili zbirovi od tri korijena jednačine (33) itd. Označimo u opće sa

$$\Phi_k (y) = 0 \tag{36}$$

ako obrazovanu jednačinu, čiji bi korijeni bili zbirovi od k korijena jednačine (33); stepen te jednačine biće

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots,(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

Neka su $P_k (y)$ i $Q_k (y)$ realan i imaginaran dio izraza

$$\Phi_k (y\sqrt{-1})$$

tako da je

$$\Phi_k (y\sqrt{-1}) = P_k (y) + \sqrt{-1}\, Q_k (y); \tag{37}$$

P_k i Q_k biće očevidno polinomi po y. Pomoću ovih polinoma obrazujmo racionalnu algebarsku funkciju

$$\gamma_k (y) = \frac{Q_k \frac{dP_k}{dy} - P_k \frac{dQ_k}{dy}}{P^2_k + Q^2_k} \tag{38}$$

Digitized by Google

Pošto je

$$\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})} = \frac{P_k - \sqrt{-1}\,Q_k}{P_k + \sqrt{-1}\,Q_k}$$

odakle je

$$(39)\qquad \frac{d}{dy}\log\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})} = \frac{P'_k - \sqrt{-1}\,Q'_k}{P_k - \sqrt{-1}\,Q_k} -$$

$$-\frac{P'_k + \sqrt{-1}\,Q'_k}{P_k + \sqrt{-1}\,Q_k} = 2\sqrt{-1}\,\frac{Q_k P'_k - P_k Q'_k}{P^2_k + Q^2_k}$$

to je identički prama (38) i (39)

$$(40)\qquad \gamma_k(y) = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{d}{dy}\log\frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})}$$

Označimo korijene jednačine (36) sa $\gamma_{k,j}$ gdje j varira od $j=1$ do $j=\binom{n}{k}$, pa će biti identički

$$\frac{d}{dz}\log\Phi_k(z) = \sum_{j=1}^{j=\binom{n}{k}} \frac{1}{z-\gamma_{k,j}}$$

i prema tome

$$\frac{d}{d(-y\sqrt{-1})}\log\Phi_k(-y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\sum\frac{1}{y-\sqrt{-1}\,\gamma_{k,j}}$$

a otuda

$$(41)\qquad \frac{d}{dy}\log\Phi_k(-y\sqrt{-1}) = \sum\frac{1}{y-\sqrt{-1}\,\gamma_{k,j}}$$

Tako bismo isto imali da je

$$(42)\qquad \frac{d}{dy}\log\Phi_k(y\sqrt{-1}) = \sum\frac{1}{y+\sqrt{-1}\,\gamma_{k,j}}$$

Digitized by Google

a oduzimanjem (42) od (41) dobija se

$$(43) \qquad \frac{d}{dy} log \frac{\Phi_k(-y\sqrt{-1})}{\Phi_k(y\sqrt{-1})} = 2\sqrt{-1} \sum \frac{\gamma_{k,j}}{y^2 + \gamma^2_{k,j}}$$

odakle, na posljetku, upoređenjem sa (40) izlazi da je

$$(44) \qquad \chi_k(y) = \sum_{j=1}^{j=\binom{n}{k}} \frac{\gamma_{k,j}}{y^2 + \gamma^2_{k,j}}$$

Obrazujmo određeni integral

$$(45) \qquad I_k = \int_0^\infty \chi_k(s) \cos rs \cdot ds$$

koji se prema jednačini (44) može napisati u obliku

$$(46) \qquad I_k = \sum_{j=1}^{j=\binom{n}{k}} \gamma_{k,j} \int_0^\infty \frac{\cos rz}{s^2 + \gamma^2_{k,j}} ds$$

Pošto svi korijeni jednačine (36) imaju realne dijelove negativne, pa dakle je

$$r > 0, \qquad R(\gamma_{k,j}) < 0$$

to se prema obrascu (26) može napisati da je

$$\int_0^\infty \frac{\cos rs}{s^2 + \gamma^2_{k,j}} ds = -\frac{\pi}{2\gamma_{k,j}} e^{r\gamma_{k,j}}$$

i prema tome je

$$(47) \qquad I_k = -\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{j=\binom{n}{k}} e^{r\gamma_{k,j}}$$

Digitized by Google

Korijen $\gamma^{k,j}$ ravan je zbiru od k korijena jednačine (33), a pošto su ovi poslijednji

$$\omega + \alpha_1, \qquad \omega + \alpha_2, \ \ldots\ \omega + \alpha_n$$

to je $\gamma_{k,j}$ ravan zbiru od k korijena α_i date jednačine (30), pošto se ovome zbiru doda $k\omega$. Prema tome i prema relaciji

$$\beta_i = e^{r\alpha_i}$$

izraz $e^{r\gamma_{k,j}}$ biće ravan proizvodu od k korijena jednačine (31), pomnoženom sa $e^{kr\omega}$. Izraz

$$\sum_{j=1}^{j=\binom{n}{k}} e^{r\gamma_{k,j}}$$

biće dakle ravan zbiru proizvoda od k korijena β_i jednačine (31), pomnoženom sa $e^{kr\omega}$ i prema tome je

$$\sum_{j-1}^{j-\binom{n}{k}} e^{r\gamma_{k,j}} = (-1)^k\, e^{rk\omega}\, b_k \tag{48}$$

Zamjenom u (47) dobija se da je

$$I_k = (-1)^{k+1}\, e^{kr\omega} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot b_k$$

odakle je

$$b_k = (-1)^{k+1}\, \frac{2e^{-kr\omega}}{\pi}\, I_k \tag{49}$$

Stavljajući u ovome obrascu uzastopce da je

$$k = 1, 2, 3, \ldots . n$$

Digitized by Google

dobijaju se obrazci

$$b_1 = -\frac{2e^{r\omega}}{\pi} I_1$$

$$b_2 = \frac{2e^{2r\omega}}{\pi} I_2$$

(50)

$$b_3 = -\frac{2e^{3r\omega}}{\pi} I_3$$

$$- - - - - - -$$

$$b_n = (-1)^n \frac{2e^{nr\omega}}{\pi} I_n$$

iz kojih se mogu izračunati svi sačinioci tražene jednačine (31) i time riješiti postavljeni zadatak transformacije. Primijetimo samo da se posljednji sačinilac b_n može izračunati neposredno po obrazcu

$$(51) \qquad b_n = (-1)^n e^{r\alpha_1} e^{r\alpha_2} \ldots e^{r\alpha_n} = (-1)^n e^{-rq}$$

Drugi slučaj: $r < 0$. Neka je ρ ma kakav realan ili kompleksan broj takav da su realni dijelovi sviju količina

$$\rho + \alpha_1, \qquad \rho + \alpha_2, \quad \ldots \quad \rho + \alpha_n$$

pozitivni. Ako se sa datom jednačinom (30) izvrši transformacija

$$x = y - \rho$$

rezultat će biti izvjesna algebarska jednačina n-tog stepena

$$(52) \qquad \Psi_1(y) = 0$$

čiji će svi korijeni imati pozitivne realne dijelove.

Obrazujmo niz jednačina

$$\Psi_2(y) = 0, \qquad \Psi_3(y) = 0, \quad \ldots \quad \Psi_n(y) = 0$$

koje su takve, da su korijeni jednačine

$$(53) \qquad \Psi_k(y) = 0$$

ravni zbirovima od k korijena jednačine (52).

Digitized by Google

Obrazujmo, na način istovjetan sa onim u prvome slučaju, racionalnu algebarsku funkciju $\gamma_k(y)$ definisanu jednačinom[1] (38), i pomoću nje određeni integral I_k definovan jednačinom (45), pa se kao i malo čas, pošto je u ovom slučaju

$$r < o, \qquad R(\gamma_{k,j}) > o$$

nalazi da je

$$b_k = (-1)^k \frac{re^{kr}}{\pi} I_k \tag{54}$$

Stavljajući u ovome općem obrascu uzastopce

$$k = 1, 2, 3, \ldots n$$

dobijaju se posebni obrasci za izračunavanje traženih sačinilaca

$$b_1, b_2, b_3, \ldots . b_n$$

jednačine (31).

Kao što se vidi, riješenje postavljenoga zadatka transformacije može se svesti na ova tri posebna zadatka:

1. Traženje kakvoga broja ω, koji kad se doda korijenima date jednačine, svi takvi zbirovi imaju realne dijelove negativne, i traženje kakvoga broja ρ, za koji će svi ti zbirovi imati realne dijelove pozitivne.

2. Obrazovanje uzastopnih algebarskih jednačina $\Phi_k(y) = o$ i $\Psi_k = o$, čiji su korijeni ravni zbirovima od dva i dva, tri i tri itd. korijena date jednačine.

3. Izračunavanje određenih integrala $I_1, I_2, \ldots I_n$.

Prvi zadatak: određivanje brojeva ω i ρ.

Neka je

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = o \tag{55}$$

data jednačina. Prije svega može se desiti da svi korijeni imaju negativne realne dijelove. Da bi to bio slučaj, potrebno je (ali ne i

[1] gdje samo treba funkciju $\Phi_k(y)$ zamijeniti funkcijom $\Psi_k(y)$.

Digitized by Google

dovoljno) da svi sačinioci $a_1, a_2, \ldots a_n$ budu pozitivni. G. Hurwitz je u posljednje vrijeme došao do jedne teoreme, koja daje u isto vrijeme i potrebne i dovoljne uslove za taj fakt i oni se sastoje u ovome:

Obrazujmo pomoćju sačinilaca $a_1, \ldots a_n$ determinantu

$$(56) \qquad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots\ldots & a_{2m-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots\ldots & a_{2m-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots\ldots & a_{2m-3} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & a_{2m-4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & a_m \end{vmatrix}$$

sastavljenu po ovome pravilu: idući sa lijeva na desno po jednoj istoj horizontalnoj vrsti, indeksi rastu sa po dvije jedinice; idući odozgo na niže u jednome istom vertikalnom stubu, indeksi rastu sa po jednom jedinicom; pored toga, za sve indekse k negativne ili veće od stepena n date jednačine stavlja se $a_k = 0$ i $a_0 = 1$.

Da bi jednačina (55) imala samo korijene sa negativnim realnim dijelovima, potrebno je i dovoljno da niz vrijednosti

$$(57) \qquad a_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots\ldots \Delta_{n-1}, a_n$$

bude pozitivan.[1]

Determinante $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \ldots$ izračunale bi se po obrascima

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \text{ itd.}$$

Ako jednačina (55) zadovoljava ove uslove, svi njeni korijeni imaju negativne realne dijelove i prema tome može se uzeti

[1] Hurwitz: Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt (Math. Ann. Bd. 46. 1895. S. 273—284.)

Digitized by Google

da je ω ravno nuli ili ma kome broju, čiji je realni dio nula ili kakav negativan broj.

Tako isto ako jednačina dobijena iz (55) zamijenivši x sa $-x$ zadovoljava gornje uslove, jednačina (55) ima samo korijena sa pozitivnim realnim dijelovima i prema tome može se uzeti da je ρ ravno nuli ili ma kome broju, čiji je realni dio nula ili kakav pozitivan broj.

Pretpostavimo sad najopćiji slučaj: da jedan ili drugi od ovih uslova, ili obadva, nisu zadovoljeni. Realni dijelovi korijena jednačine (55) ne mogu tada biti istoga znaka.

Da bi u tome slučaju odredili broj ω, zamijenimo u (55) x sa

$$x = y - \xi$$

gdje je ξ jedan za sad neodređen broj i neka je

$$(58) \qquad y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_{n-1} y + c_n = 0$$

tako dobivena nova jednačina, gdje će sačinioci $c_1 \ldots c_n$ biti izvjesni polinomi po ξ.

Obrazujmo Hurwitz-ov niz

$$(59) \qquad c_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots . \Delta_{n-1}, c_n$$

za jednačinu (58); svaki od članova toga niza biće izvjestan polinom po promjenljivoj ξ tako, da će niz (59) biti prestavljen jednim nizom polinoma

$$(60) \qquad \varphi_1(\xi), \quad \varphi_2(\xi), \ldots . \varphi_n(\xi).$$

Prije svega lako se dokazuje, da ako su svi polinomi ovoga niza pozitivni za jednu realnu vrijednost $\xi = a$, oni će biti pozitivni i za sve vrijednosti ξ manje od a. Jer pošto niz (60) za $\xi = a$ zadovoljava Hurwitz-ove uslove, jednačina (58) kad se u ovoj zamijeni ξ tom vrijednošću, ima samo korijene sa negativnim realnim dijelovima pa dakle je

$$R(\alpha_i + a) < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

a pošto je $\xi < a$ biće à fortiori

$$R(\alpha_i + \xi) < 0$$

Digitized by Google

što znači, opet prema Hurwitz-ovoj teoremi, da niz (60) mora biti pozitivan.

Prema tome, kad je nađen ma kakav realan broj a, za koji je niz (60) pozitivan, može se za ω uzeti ma kakav broj čiji je realni dio manji od a. A egzistencija broja a očevidna je već i prema tome, što svaki broj manji od gornje granice realnih dijelova jednačine (55), kad se toj granici promijeni znak, zadovoljava uslov tražen za a.

Na istovjetan bi se način postupalo i pri određivanju broja ρ, sa tom razlikom, što bi se na mjesto jednačine (58) imala ona, što bi se dobila iz (55) transformacijom

$$x = \xi - y$$

Primjetimo još i to, da se pomoću broja ω može imati približan pojam o veličinama sačinilaca $b_1, b_2, \ldots b_n$ tražene jednačine (31). jer iz obrazaca

$$b_1 = -\sum e^{r\alpha_i} \qquad b_2 = \sum e^{r(\alpha_i + \alpha_j)}, \ldots\ldots\ldots$$

dobijaju se jednačine

$$(61) \qquad \left|b_1\right| < \sum \left|e^{r\alpha_i}\right| \qquad b_2 < \sum \left|e^{r(\alpha_i+\alpha_j)}\right| \ldots\ldots$$

a pošto je u opće

$$R(\alpha_i) + \omega < 0$$

pa dakle

$$R(\alpha_i) < -\omega$$

to je

$$\left|e^{r\alpha_i}\right| < e^{-r\omega}$$

i prema tome

$$\left|e^{r(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_k)}\right| < e^{-kr\omega}$$

Digitized by Google

Upoređenjem sa (61) dobijaju se nejednačine

$$(62)\qquad \begin{aligned} |b_1| &< \binom{n}{1} e^{-r\omega} \\ |b_2| &< \binom{n}{2} e^{-2r\omega} \\ &\text{— — — — — — — —} \\ |b_k| &< \binom{n}{k} e^{-kr\omega} \end{aligned}$$

koje određuju gornju granicu modula traženih sačinilaca b_k.

Drugi zadatak: formacija uzastopnih jednačina $\Phi_k(y) = o$ i $\Psi_k(y) = o$.

Zadatak se sastoji u tome, da se, kad je data jednačina $f(x) = o$ obrazuju uzastopne jednačine, čiji će korijeni biti zbirovi od dva, tri, četiri itd. korijena date jednačine.

On se, kao što je poznato, riješava upotrebom simetričnih funkcija korijena jednačine $f(x) = o$, koje će biti racionalne funkcije sačinilaca $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Treći zadatak: izračunavanje određenih integrala $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$.

Zadatak se svodi na izračunavanje $n-1$ integrala oblika

$$(63)\qquad I = \int_0^\infty \chi(x) \cos rx \, dx$$

gdje se $\chi(x)$ može napisati u jednome ili drugom od oblika

$$(64)\qquad \chi(x) = \frac{PQ' - P'Q}{P^2 + Q^2}$$

$$(65)\qquad \chi(x) = \sum_{(i)} \frac{\gamma_i}{x^2 + \gamma_i^2};$$

Digitized by Google

P i Q su izvjesni polinomi po x sa stalnim i realnim sačiniocima; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ su korijeni izvjesne algebarske jednačine i realni mu dijelovi imaju svi jedan isti znak.

Funkcija $\chi(x)$ je algebarska racionalna funkcija sa realnim sačiniocima, kao što se vidi iz (64). Osim toga, ta funkcija ima jedan isti znak za sve realne vrijednosti x i po apsolutnoj vrijednosti može donekle rasti kad x raste počevši od nule, ali kad x pređe jednu izvjesnu pozitivnu vrijednost, apsolutna vrijednost funkcije stalno opada i teži asimtotno nuli kad x beskonačno raste.

Jer pošto svi korijeni γ_i imaju realne dijelove istoga znaka, to ako su ti korijeni svi realni, očevidno je da će i svi izrazi

$$\frac{\gamma_i}{x^2+\gamma_i^2}$$

imati isti znak i da će im apsolutna vrijednost stalno opadati do nule, kad x raste od 0 do ∞.

Ako ima i imaginarnih korijena i ako je n. pr.

$$\gamma_1 = p + q\sqrt{-1}$$
$$\gamma_2 = p - q\sqrt{-1}$$

tim korijenima odgovara zbir

$$(66)\quad \frac{\gamma_1}{x^2+\gamma_1^2}+\frac{\gamma_2}{x_2+\gamma_2^2}=\frac{2p\,(x^2+p^2+q^2)}{(x^2+p^2-q^2)^2+4p^2q^2}$$

a pošto za sve korijene p ima jedan isti znak, taj će prema obrascu (66) biti i znak funkcije $\chi(x)$, pa ma kakva bila vrijednost x. U isto vrijeme iz obrasca (66) vidi se i to, da zbir sa lijeve strane, počevši od izvjesne vrijednosti x, neprestano opada do nule, što znači, da će taj isti slučaj biti i sa samom funkcijom $\chi(x)$.

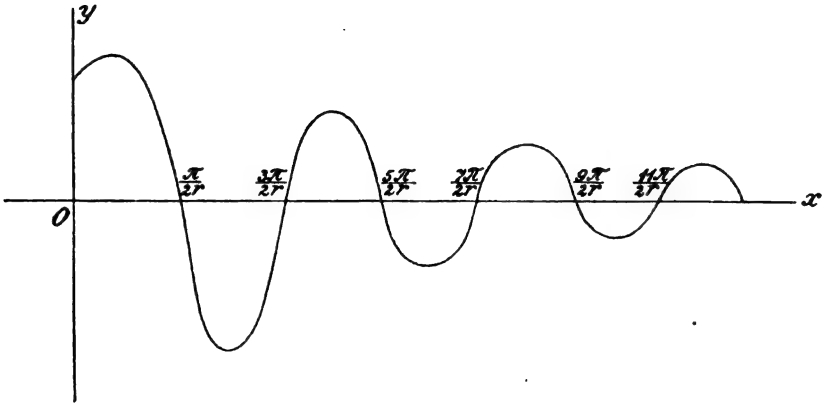
Iz toga se lako uviđa da će, ako se sa $\theta(x)$ označi apsolutna vrijednost funkcije $\chi(x)$, kriva linija

$$y = \theta(x)\cos rx$$

imati oblik sl. 3., a vrijednost integrala I biće ravna površini između te krive linije i abscisne osovine, računajući od $x = o$ do $x = \infty$.

Digitized by Google

Sama ova vrijednost može se izračunati sa kolikom se hoće aproksimacijom na ovaj način: Neka je $\zeta(x)$ kakva funkcija od x, koja zadovoljava ova dva uslova:



Sl. 3.

1. Da počevši od kakve pozitivne vriiednosti x-a (ili od $x = 0$) neprekidno opada i teži nuli kad x beskonačno raste;

2. da se vrijednost određenog integrala

$$P = \int_0^\infty \left[\zeta(x)\right]^k \cos rx \, dx \tag{67}$$

može točno izračunati za ma kakav cio i pozitivan broj k.

Neka su za tim

$$h_1, h_2, \ldots\ldots h_n$$

vrijednosti koje dobija funkcija $\gamma(x)$ kad se u njoj uzastopce izmjenjuje

$$x = x_1, x_2, \ldots\ldots x_m \tag{68}$$

gdje su x_i ma koje pozitivne vrijednosti x-a. Tada se uvijek može odrediti m sačinilaca

$$A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$$

tako da funkcija

$$\Omega(x) = A_1 \zeta(x) + A_2 \left[\zeta(x)\right]^2 + \ldots\ldots + A_m \left[\zeta(x)\right]^m \tag{69}$$

Digitized by Google

za vrijednosti x-a u nizu (68) dobije odgovarajuće vrijednosti

$$h_1, h_2, \ldots . h_m;$$

ovi bi se sačinioci dobili riješenjem sistema od m linearnih jednačina

$$\Omega(x_1) = h_1, \quad \ldots . \quad \Omega(x_m) = h_m$$

sa m nepoznatih količina $A_1, \ldots A_m$. I kad su ovi sačinioci izračunati funkcija $\gamma(x)$ može se u integralu

$$I = \int_0^\infty \gamma(x) \cos rx \, dx$$

izmijeniti funkcijom $\Omega(x)$; griješka će biti u toliko manja, u koliko je veći broj vrijednosti (68) i dovoljnim povećavanjem toga broja ona se može učiniti manjom od kakvog se hoće maloga broja.

Prema tome može se približno uzeti da je

$$(70) \qquad P = \int_0^\infty \Omega(x) \cos rx \, dx = \sum_{(k)} A_k \int_0^\infty \left[\zeta(x)\right]^k \cos rx \, dx$$

Za integrale

$$(71) \qquad \int_0^\infty \left[\zeta(x)\right]^k \cos rx \, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

pretpostavljeno je da se mogu tačno izračunati; neka su dakle

$$H_1, H_2, \ldots . H_m$$

uzastopne vrijednosti tih integrala za $k = 1, 2, \ldots . m$, pa će biti

$$(72) \qquad P = A_1 H_1 + A_2 H_2 + \ldots + A_m H_m$$

i to sa toliko većom aproksimacijom, koliko je broj m vrijednosti (68) veći.

Digitized by Google

Kao što se vidi, kad god je mogućno izračunati određene integrale (71), posao približnog izračunavanja integrala P svodi se:

1. na određivanje vrijednosti $h_1, h_2 \ldots h_m$ koje dobija funkcija $\chi(x)$ za $x = x_1, x_2 \ldots x_m$, a ove se određuju prostom zamjenom;

2. na određivanje sačinilaca $A_1, A_2 \ldots A_m$, koje se svodi na riješavanje m linearnih jednačina sa m nepoznatih.

Mogućnost izračunavanja integrala (71) zavisi od izbora funkcije $\zeta(x)$, koja bi zadovoljavala gore navedene uslove. Tako n. pr. može se uzeti da je

$$\zeta(x) = e^{-\lambda x} \tag{73}$$

gdje je λ kakav pozitivan broj; tada bi imali da je

$$\int_0^\infty \left[\zeta(x)\right]^k \cos rx\, dx = \int_0^\infty e^{-k\lambda x} \cos rx\, dx = \frac{k\lambda}{r^2 + k^2\lambda^2} \tag{74}$$

Tako isto može se uzeti funkcija

$$\zeta(x) = e^{-\lambda x^2} \tag{75}$$

gdje je opet λ kakav pozitivan broj; tada bi bilo

$$\int_0^\infty \left[\zeta(x)\right]^k \cos rx\, dx = \int_0^\infty e^{-k\lambda x^2} \cos rx\, dx = \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k\lambda}}\, e^{-\frac{r^2}{4k\lambda}}$$

Broj λ bi se odredio tako, da se kriva $y = \Omega(x)$ što bolje podudara sa krivom $y = \chi(x)$; u ostalom izbor ovoga broja ne utiče mnogo na stepen aproksimacije, koji zavisi poglavito od broja m vrijednosti (68).

Primijetimo i to, da u obrascu (72) sačinioci $A_1 \ldots A_m$ ne zavise od r, koje figuriše samo u izrazima $H_1, \ldots H_m$.

Uzevši n. pr. za $\zeta(x)$ funkciju $e^{-\lambda x}$ imali bi

$$P = \lambda\left[\frac{A_1}{r^2 + \lambda^2} + \frac{2A_2}{r^2 + 4\lambda^2} + \ldots + \frac{m\,A_m}{r^2 + m^2\lambda^2}\right]$$

Digitized by Google

gdje bi se $A_1 \ldots A_m$ dobili riješenjem linearnih jednačina

$$A_1 e^{-\lambda x_1} + A_2 e^{-2\lambda x_1} + \ldots + A_m e^{-m\lambda x_1} = h_1$$

$$A_1 e^{-\lambda x_2} + A_2 e^{-2\lambda x_2} + \ldots + A_m e^{-m\lambda x_2} = h_2$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$A_1 e^{-\lambda x_m} + A_2 e^{-2\lambda x_m} + \ldots + A_m e^{-m\lambda x_m} = h_m$$

III. Izračunavanje sačinilaca $b_1, b_2 \ldots b_m$ u obliku redova.

Označivši kao i ranije sa

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ korijene date jednačine (30)

$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ korijene transformirane jednačine (31)

biće

(77)
$$b_1 = -\sum \beta_i = -\sum e^{r\alpha_i}$$

$$b_2 = \sum \beta_i \beta_j = \sum e^{r(\alpha_i + \alpha_j)}$$

$$b_3 = -\sum \beta_i \beta_j \beta_k = \sum e^{r(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)}$$

. . . .

Zamislimo, kao i ranije, obrazovane uzastopne algebarske jednačine

(78) $\Phi_2(y) = 0, \quad \Phi_3(y) = 0, \; \ldots \ldots \; \Phi_n(y) = 0$

čiji bi korijeni bili ravni zbirovima od dva, tri, četiri itd. korijena date jednačine i označimo u opće sa $S_k^{(i)}$ zbir k-tih stepena korijena jednačine $\Phi_i(y) = 0$.

Ako se eksponencijalni izrazi na desnoj strani obrazaca (77) razrazviju u beskrajne redove, dobija se da je

Digitized by Google

$$b_1 = -\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{r^k}{1.2..k} S_k^{(1)}$$

$$b_2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{r^k}{1.2..k} S_k^{(2)} \tag{79}$$

$$b_3 = -\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{r^k}{1.2..k} S_k^{(3)}$$

. . . . . .

Redovi na desnoj strani konvergentni su za sve vrijednosti broja r i daju sačinioce b_1, b_2, b_3 . . . . sa kolikom se hoće aproksimacijom. No pri njihovoj upotrebi od važnosti bi još bilo znati na kome se članu reda možemo zadržati, pa da se traženi sačinilac dobije sa kakvom u naprijed datom aproksimacijom, n. pr. sa 10^{-h} tačno.

Neka je ρ gornja granica modula korijena α_i, pa će biti.

$$\left| S_k^{(i)} \right| < \binom{n}{i} i^k \rho^k \tag{80}$$

(gdje je n stepen date jednačine).

Uočimo opći obrazac

$$b_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{r^k}{k!} S_k^{(i)} \tag{81}$$

i zadržimo samo njegovih m prvih članova, tako da bude

$$b_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{k=m} \frac{r^k}{k!} S_k^{(i)} + R_m \tag{82}$$

gdje je

$$R_m = \frac{r^m}{m!} S_m^{(i)} + \frac{r^{m+1}}{(m+1)!} S_{m+i}^{(i)} + \ldots\ldots \tag{83}$$

Digitized by Google

Vodeći računa o nejednačini (80) dobija se da je

$$|R_m| < \sum_{k=m}^{k=\infty} u_k$$

gdje je kratkoće radi stavljeno da je

$$u_k = \binom{n}{i} \frac{[i r\rho]^k}{k!}$$

Uzmimo indeks m dovoljno veliki da bi bila zadovoljena ova dva uslova:

1. da bude

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{1}{2}$$

2. da bude

$$u_m < \frac{1}{10^h}$$

Tada će, prema poznatom pravilu iz teorije redova biti

$$R_m < \frac{1}{10^h}$$

Uslov 1. dovodi do

(84) $$m > 2 i r\rho - 1$$

a uslov drugi do

(85) $$\binom{n}{i} \frac{[i r\rho]^m}{m!} < \frac{1}{10^h}$$

Rang m člana, na kome se pri izračunavanju sačinioca b_i može zaustaviti, da bi se ovaj sačinilac imao sa aproksimacijom većom od 10^{-h}, biće dat najmanjom vriednošću cijelog broja m, što zadovoljava uslove (84) i (85).

Digitized by Google

IV. O jednoj osobini transformacije $y = e^{rx}$.

Zamislimo, da je sa datom jednačinom $f(x) = 0$ izvršena prvo transformacija

$$x = y + t$$

gdje je t kakav za sad neodređen broj i neka je

$$\varphi(y) = 0$$

rezultat te transformacije. Izvršimo za tim, po ranijim upustvima, transformaciju

$$y = \frac{1}{r} \log z$$

ili

$$z = e^{ry}$$

gdje je r kakav realan pozitivan broj, i neka je

$$\psi(z) = 0 \tag{86}$$

nova tako dobijena jednačina.

Ako se sa $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots\ldots$ označe korijeni jednačine (86), biće identički

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dz} = \sum_1^n \frac{1}{z - \gamma_i}$$

a pošto je

$$z = e^{ry} = e^{r(x-t)}$$

to će biti

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dz} = \sum_1^n \frac{1}{z - e^{r(x-t)}}$$

Predpostavimo da se traži broj korijena prvobitne jednačine $f(x) = 0$, koji se nalaze sa lijeve ili desne strane jedne date prave $x = a$, paralelne osovini imaginarnih vrijednosti u ravni kompleksnih količina.

Digitized by Google

Neka su a_1 i a_2 $(a_1 < a < a_2)$ dvije takve vrijednosti, da jednačina $f(x) = 0$ nema ni jedan korijen u prostoru između pravih $x = a_1$ i $x = a_2$.

Neka su za tim

$1, 2, 3 \ldots p$ indeksi korijena sa lijeve strane prave $x = a$

$p+1, p+2, \ldots n$ indeksi korijena sa desne strane te prave.

Traženi broj p očevidno je u isto vrijeme ravan i broju korijena sa lijeve strane prave $x = A$, gdje je kratkoće radi stavljeno, da je

$$x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

Označimo sa $\lambda(r)$ vrijednost izraza

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{ds}$$

kad se u ovome stavi $s = 1$, $t = A$, pa će biti

$$\lambda(r) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{1 - e^{r(\alpha_i - A)}} \tag{87}$$

gdje su α_i korijeni jednačine $f(x) = 0$.

Uočimo prvo jedan korijen α_1 realan i sa lijeve strane prave $x = a$. Za taj će korijen biti $\alpha_1 < a$, pa dakle

$$0 < e^{r(a_1 - A)} < e^{r(a_1 - A)} < 1$$

i prema tome

$$\frac{1}{1 + e^{r(a_1 - A)}} < \frac{1}{1 - e^{r(\alpha_1 - A)}} < \frac{1}{1 - e^{r(a_1 - A)}} \tag{88}$$

Uočimo za tim dva imaginarna konjugovana korijena α_1 i α_2. opet sa lijeve strane prave $x = a$; stavimo da je

$$\alpha_1 = \xi + \eta i$$
$$\alpha_2 = \xi - \eta i$$

Digitized by Google

pa će biti identički

$$(89) \qquad \frac{1}{1-e^{r(\alpha_1-A)}}+\frac{1}{1-e^{r(\alpha_2-A)}}=$$

$$=\frac{2\,[1-e^{r(\xi-A)}\cos r\eta]}{1-2e^{r(\xi-A)}\cos r\eta+e^{2r(\xi-A)}}$$

Pošto u opće za a i x realne i

$$-1<a<+1$$
$$0<x<1$$

mora biti

$$0<\frac{1}{1+x}<\frac{1-ax}{1-2ax+x^2}<\frac{1}{1-x}$$

to je lako uvjeriti se da je izraz na desnoj strani jednačine (89) uvijek veći od

$$\frac{2}{1+e^{r(\xi-A)}}$$

a uvijek manji od

$$\frac{2}{1-e^{r(\xi-A)}}$$

a pošto je, sa druge strane, $\xi<a_1$, pa dakle

$$e^{r(\xi-A)}<e^{r(a_1-A)}<1$$

to je

$$(90) \qquad \frac{2}{1+e^{r(a_1-A)}}<\frac{1}{1-e^{r(\alpha_1-A)}}+$$

$$+\frac{1}{1-e^{r(\alpha_2-A)}}<\frac{2}{1-e^{r(a_1-A)}}$$

Nejednačine (88) i (90) pokazuju da je za sve korijene sa lijeve strane prave $x=a$, bilo da su ovi realni ili imaginarni

Digitized by Google

$$(91) \qquad \frac{p}{1+e^{r(a_1-A)}} < \sum_{1}^{p} \frac{1}{1-e^{r(a_i-A)}} < \frac{p}{1-e^{r(a_1-A)}}$$

Uočimo sad korijene sa desne strane prave $x=a$: to su u isto vrijeme i korijeni sa desne strane prave $x=a_2$.

Za jedan takav realan korijen α_1 biće $\alpha_1 > a_2$ pa dakle

$$1 < e^{r(a_2-A)} < e^{r(a_1-A)}$$

i prema tome

$$(92) \qquad \frac{1}{1-e^{r(a_2-A)}} < \frac{1}{1-e^{r(a_1-A)}} < 0$$

Ako su dva korijena

$$\alpha_1 = \xi + i\eta$$
$$\alpha_2 = \xi - i\eta$$

imaginarni, imali bi opet jednačinu (89), ali sa tom razlikom, što je $\xi - A > 0$ pa dakle

$$e^{r(\xi-A)} > 1$$

i onda pošto u opće za a i x realne i takve da je

$$-1 < a < +1. \qquad x > 1$$

mora biti

$$\frac{1}{1-x} < \frac{1-ax}{1-2ax+x^2} < \frac{1}{1+x}$$

to će biti

$$(93) \qquad \frac{2}{1-e^{r(a^2-A)}} < \frac{1}{1-e^{r(a_1-A)}} +$$

$$+ \frac{1}{1-e^{r(a_2-A)}} < \frac{2}{1+e^{r(a_2-A)}}$$

i prema tome na osnovu nejednačina (92) i (93) biće

Digitized by Google

$$(94)\qquad \frac{n-p}{1-e^{r(a_2-A)}} < \sum_{n+1}^{n} \frac{1}{1-e^{r(\alpha_i-A)}} < \frac{n-p}{1+e^{r(a_2-A)}}$$

Iz (91) i (94) dobija se

$$\frac{p}{1+e^{r(a_1-A)}} + \frac{n-p}{1-e^{r(a_2-A)}} < \lambda(r) < \frac{p}{1-e^{r(a_1-A)}} + \frac{n-p}{1+e^{r(a_2-A)}}$$

ili još

$$(95)\qquad p-\varepsilon < \lambda(r) < p+\eta$$

gdje je kratkoće radi stavljeno da je

$$(96)\qquad \varepsilon = \frac{p\,e^{r(a_1-A)}}{1+e^{r(a_1-A)}} + \frac{n-p}{e^{r(a_2-A)}-1}$$

$$\eta = \frac{p\,e^{r(a_1-A)}}{1-e^{r(a_1-A)}} + \frac{n-p}{e^{r(a_2-A)}+1}$$

Pošto je

$$a_1 - A < 0 \qquad a_2 - A > 0$$

to se iz (96) lako uviđa da ε i η teže nuli kad r beskrajno raste, t. j. da prema (95) $\lambda(r)$ teži traženome broju korijena p.

Ali funkcija $\lambda(r)$ može nam dati ovaj broj korijena, a da se ne mora pustiti da r beskrajno raste. Potražimo najmanju vrijednost parametra r za koju bi u jedno isto vrijeme bili zadovoljeni uslovi.

$$\frac{e^{r(a_1-A)}}{1+e^{r(a_1-A)}} < \frac{1}{4n}$$

$$\frac{1}{e^{r(a_2-A)}-1} < \frac{1}{4n}$$

$$\frac{e^{r(a_1-A)}}{1-e^{r(a_1-A)}} < \frac{1}{4n}$$

$$\frac{1}{e^{r(a_2-A)}+1} < \frac{1}{4n}$$

Digitized by Google

Lako se nalazi da će to biti onda, kad je

$$r > \frac{2\log(4n+1)}{a_2 - a_1} \tag{97}$$

i ako je to slučaj, svaki član desnih strana jednačina (96) manji je od $\frac{l}{4}$, t. j. biće

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

$$0 < \eta < \frac{1}{2}$$

a prema tome i prema (95) biće

$$p - \frac{1}{2} < \lambda(r) < p + \frac{1}{2}$$

ili još

$$\lambda(r) - \frac{1}{2} < p < \lambda(r) + \frac{1}{2}$$

a to pokazuje da je broj p ravan broju, koji se dobija, kad se u broju

$$0,5 + \lambda(r)$$

zanemare svi desetni razlomci i zadrži samo cio broj.

Iz toga se izvodi jedna važna osobina transformacije, o kojoj je bilo govora u toku ove rasprave, a koja se može izkazati u obliku ove teoreme:

Neka je Δ jedna oblast u ravni kompleksnih količina, ograničena dvjema pravim linijama $x = a_1$ i $x = a_2$, paralelnim osi imaginarnih vrijednosti, a za koju se oblast predpostavlja da ne sadrži ni jedan korijen date jednačine $f(x) = 0$.

Izvršimo sa ovom jednačinom najprije prostu transformaciju $x = y + t$, a za tim transcendentnu transformaciju $z = e^{ry}$. Obrazujmo logaritamski izvod po z od polinoma tako dobijene jednačine i izmijenimo u ovome

$$z = 1, \quad t = \frac{1}{2}(a_1 + a_2);$$

Digitized by Google

na posljetku izmijenimo r ma kojim realnim pozitivnim brojem većim od vrijednosti

$$\frac{2 \log (4n+1)}{\delta}$$

gdje n označava stepen jednačine, δ širinu oblasti Δ (tako da je $\delta = a_2 - a_1$). Neka je λ broj dobijen kao rezultat te izmjene.

Jednačina $f(x) = 0$ imaće toliko korijena sa lijeve strane oblasti Δ, koliko ima cijelih jedinica u broju $0,5 + \lambda$, a onoliko korijena sa desne strane te oblasti, koliko ima cijelih jedinica u broju $n - \lambda - 0,5$.

Ova teorema daje naročitu važnost ovakvoj vrsti transformacija i ističe na vidik važnost traženja što lakših metoda za njihovo izvršenje.

Digitized by Google

O osobitoj ravnocrtnoj plohi trećega reda u linearnom kompleksu.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. prosinca 1900.

NAPISAO DR. JURAJ MAJCEN.

Uzmemo li o obzir proizvođenje linearnog kompleksa na način *Sylvesterov*, moći ćemo lako odrediti sve moguće ravnocrtne plohe drugoga stupnja, kojim izvodnice pripadaju linearnom kompleksu i s njim sjedinjenom ništičnom sustavu. Od ∞^3 množine pravaca u kompleksu, bit će moguće na temelju konstrukcije samoga kompleksa svratiti pozornost na one, koji su izvodnice neke *ravnocrtne plohe trećega reda* Π. Ova ploha pokazuje osobite vlastitosti već s toga, što se ona ima držati jednim dijelom degenerirane plohe četvrtoga reda, koja je u kompleksu sadržana na poseban način.

Neka su (M_1, r_1) i (M_2, r_2) dva projektivna pramena zraka, koji imaju jednu korespondentnu zajedničku zraku M_1M_2 (ili m_1, ujedno m_2). Osim zrake M_1M_2 moći će se u svakom pramenu odabrati dvije povoljne zrake, koje sa M_1M_2 jednoznačno određuju projektivnost pramenova, jer je ništična tačka svake povoljne ravnine, koja pramenove siječe uvijek u perspektivnim nizovima, onim zrakama potpuno određena.

Za svaki korespondentni par zraka a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; ....., obaju pramena (M_1, r_1) i (M_2, r_2) bit će između sviju zraka linearne kongruencije, koja je sadržana u linearnom kompleksu, *samo jedna* zraka, koja istodobno siječe obje zrake korespondentnoga para *okomito*. Potraže li se dakle svi takovi pravci $a, b, c, \ldots\ldots$, *najkraćih udaljenosti* za sve moguće linearne kongruencije $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, ..., nastaje pitanje, što će biti njihov proizvod, pa koja su svojstva njegova i snošaji prama linearnom kompleksu i ništičnom sustavu?

Digitized by Google

1. Pomaknut ćemo pramen (M_2, ν_2) paralelno samom sebi, dok M_2 ne dođe u M_1. Imat ćemo tada dva koncentrična projektivna pramena zraka (M'_2, ν'_2) i (M_1, ν_1), koji pače leže perspektivno, jer imaju jednu zajedničku korespondentnu zraku M_1M_2. Oba će dakle pramena proizvađati svežanj ravnina prvoga reda; os x_r toga svežnja prolazi zajedničkim vrhom $(M_2$ ili $M_1)$ obaju pramena, pa će i ravnina (x_r, M_1M_2) pripadati svežnju kao elemenat. Položimo li na pojedine ravnine svežnja u M_1 okomice $(a', b', c', \ldots\ldots)$, to će ovi pravci biti sa traženim najkraćim udaljenostima paralelni. Tako će n. pr. a stojati *okomito* na ravnini (a_1, a'_2), dakle i na smjerovima korespondentnih zraka a_1 i a_2 zadanih pramenova. Isto vrijedi i za sve ostale pravce $(\ldots b', c' \ldots\ldots)$. Ovi će dakle pravci tvoriti pramen zraka (M_1, μ_1); njegova je ravnina μ_1 na osi x_r svežnja ravninâ okomita. Pramen je zraka (M_1, μ_1) i sa svežnjem ravnina x_r i sa zadanim pramenovima (M_1, ν_1) i (M_2, ν_2) projektivan, pri čem su istoimeni elementi a', a_1; a', a_2; $\ldots\ldots$; korespondentni. Ovi pramenovi (M_1, μ_1) i (M_1, ν_1) ne mogu više biti perspektivni, jer svi korespondentni parovi tvore prave kutove, pa ne može nijedan par pasti zajedno.

Pošto su zrake pramena (M_1, μ_1) sa pravcima $a, b, c, \ldots\ldots$, plohe Π paralelne, to će jedna između njih (m') biti sa onim pravcem (m) plohe paralelna, koji predočuje najkraću udaljenost za korespondentni zajednički par m_1, m_2. Smjer pravca m dobit ćemo dakle, ako u M_1 na M_1M_2 položimo okomitu ravninu ϱ_m i potražimo njezinu presječnicu m' sa ravninom pramena (M_1, μ_1). Možemo dakle reći:

Pravci najkraćih udaljenosti sviju korespondentnih parova obaju pramena (M_1, ν_1) *i* (M_2, ν_2) *jesu sa nekom stanovitom ravninom* (μ) *paralelni.*

Jasno je, da će pravci $(a'', b'', c'', \ldots\ldots)$, povučeni nekom tačkom X prostora paralelno sa pravcima $(a, b, c, \ldots\ldots)$ plohe Π, ležati u ravnini ξ, koja je sa μ paralelna.

Jer položimo li kroz X ravnine, koje stoje na zrakama pramena (M_1, ν_1) okomito, to će one tvoriti svežanj, koji je sa ovim pramenom projektivan. Isto će tako ravnine, položene kroz X okomito na zrake pramena (M_2, ν_2), tvoriti svežanj, koji je sa ovim pramenom projektivan. Oba će svežnja ravnina imati jednu ravninu korespondentno zajednički, i to onu, koja stoji na M_1M_2 okomito, pa će za to imati perspektivni položaj. Ravnina njihovog perspek-

Digitized by Google

tivnog presjeka jest ravnina ξ, a perspektivni je presjek pramen (X, ξ), koji je sa (M_1, μ_1) paralelan.

Opazili smo prije, da će pramenovi (M_1, τ_1) i (M_1, μ_1) biti projektivni, pa da ne će nikad moći biti perspektivni. Njihov će dakle proizvod biti svežanj ravnina drugoga reda (M_1^2). Pojedine ravnine toga svežnja prolaze korespondentnim parovima onih pramenova, dakle parovima zraka: (a', a_1), (b', b_1), (c', c_1), ...,. Pošto pravci $a, b, c, \ldots$., plohe Π moraju sjeći pojedine istoimene zrake $a_1, b_1, c_1, \ldots$., a ujedno su sa odnosnim pravcima $a', b', c', \ldots$. paralelni, to će oni ležati u ravninama svežnja (M_1^2). Isti ćemo resultat dobiti i onda, ako na istovetni način konstruiramo svežanj drugoga reda (M_2^2), za koji je tačka M_2 središte, pa će za to općenito vrijediti zakon:

Pravci najkraćih udaljenosti za korespondentne parove zraka pramenova (M_1, τ_1) i (M_2, τ_2) projiciraju se iz tačaka M_1 i M_2 svežnjevima ravnina drugoga reda.

Iz ovoga izlazi neposredno, da su svežnjevi ravninâ (M_1^2) i (M_2^2) projektivni, jer će njekoj ravnini (a', a_1) prvoga svežnja biti ravnina (a'', a_2) u drugom svežnju korespondentna, gdje su a' i a'' paralelni pravci, a a_1 i a_2 korespondentne zrake temeljnih pramenova. Ona će dva svežnja ravnina drugoga reda imati jednu zajedničku korespondentnu ravninu i to onu, koja prolazi pravcem $M_1 M_2$ (ili pravcima m_1 i m_2) i onim pravcima m' i m'', koji su sa m paralelni. Pošto pak dva projektivna svežnja ravnina drugoga reda tvore u opće ravnocrtnu plohu četvrtoga reda,[1] to će u našem posebnom slučaju ona dva svežnja ravnina tvoriti plohu, koja se raspada u zajedničku njihovu korespondentnu ravninu i *plohu trećega reda* II. Ova ploha sadržaje sve pravce $a, b, c, \ldots$.. Ravnine (a', a_1) i (a'', a_2) projiciraju najme jedan te isti pravac a, koji je sa a' i a'' paralelan, a siječe zrake a_1 i a_2. Presiječemo li obadva svežnja (M_1^2) i (M_2^2) povoljnom ravninom, to ćemo u njoj dobiti dva projektivna pramena zrakâ drugoga reda, koji imaju jednu zraku korespondentno zajednički i to onu, u kojoj ravnina siječe zajedničku korespondentnu ravninu obaju svežanja drugoga reda. Ova će dakle dva projektivna pramena proizvesti, osim zajedničke korespondentne zrake, *krivulju trećega reda.*

S razloga, što je po Plückerovim formulama ova krivulja ujedno četvrtoga razreda, to će čunjevi opisani plohi II iz povoljne tačke

[1] Reye, D. Geom. d. Lage, III. Aufl., II. Abth., p. 231.

Digitized by Google

X prostora biti četvrtoga reda, a trećega razreda, što i opet karakterizuje plohu trećega reda.

2. Našli smo, da će zrake pramena (M_1, ϱ_1) biti sa pojedinim pravcima $a, b, c, \ldots\ldots$, plohe Π paralelni. Ravnina će ϱ_1 u općem položaju sjeći obje ravnine r_1 i r_2 temeljnih pramenova u pravcima p'_1 dotično q'_2. Na plohi će dakle ležati pravac p, koji je sa p'_1 paralelan, pa pošto on mora sjeći zraku p_1 pramena (M_1, r_1), morat će on ležati posve u ravnini r_1. Isti pravac p sjeći će i korespondentni pravac p_2 u pramenu (M_2, r_2), pa će za to prolaziti vrhom M_2 ovoga pramena. Isto vrijedi i za pravac q'_2. Izvodnica plohe Π, koja je sa q'_2 paralelna, pasti će sa q'_2 iz istih razloga zajedno.

Isto izlazi i odatle, što će svežnjevi ravnina drugoga reda (M_1^2) i (M_2^2) za to, što im se vrhovi nalaze na plohi Π, biti dijelovi degeneriranih svežanja ravnina trećega reda, jer su u opće čunjevi, plohi opisani iz povoljne tačke, trećega razreda. Oni se svežnjevi raspadaju u svežnje drugoga reda i svežnjeve prvoga reda, a za ove su posljednje osi ujedno izvodnice plohe Π. Kao takove moraju ležati u r_1 i r_2, jer prolaze vrhovima M_1 i M_2, a moraju sjeći korespondentne zrake u pramenima (M_2, r_2) i (M_1, r_1). Za to slijedi:

U ravninama temeljnih pramenova (M_1, r_1) i (M_2, r_2) leži po jedan pravac najkraće udaljenosti sa dva korespondentna para zraka, od kojih svaki prolazi jednim vrhom pramenova.

Pošto se u ravninama r_1 i r_2 nalaze izvodnice p odnosno q plohe Π, to će svaka od ovih ravnina morati sjeći plohu Π u *krivulji drugog stupnja*. Viđeli smo gore, da su središta M_1 i M_2 temeljnih pramenova tačke plohe Π. Pravac će dakle $M_1 M_2$ morat sjeći plohu u trećoj njekoj tački (M_3). Pošto jednom od triju tačaka (M_1) prolazi izvodnica (q) plohu, koja leži u r_2, to će krivulja drugoga reda, u kojoj r_2 jošte plohu siječe, morat prolaziti tačkama M_2 i M_3, jer ona u opće prolazi sjecišnim tačkama pojedinih izvodnicâ plohe sa ravninom r_2. Iz istih će razloga ravnina r_1 sjeći plohu u pravcu p i krivulji drugoga stupnja, koja prolazi tačkama M_1 i M_3. Tačka M_3 ne može biti druga nego ona tačka, u kojoj jedna izvodnica siječe $M_1 M_2$ ili m_1 i m_2. Tačka će dakle M_3 biti ona, u kojoj pravac najkraće udaljenosti (m) siječe ujedinjeni korespondentni par zraka m_1 i m_2. Odatle izlazi:

Sve izvodnice $a, b, c, \ldots\ldots$, plohe Π sijeku ravnine r_1 i r_2 temeljnih pramenova (osim onih koje se nalaze u tim ravninama)

Digitized by Google

još u krivuljama drugog stupnja. Jedna od njih prolazi središtem M_1, druga središtem M_2. Osim toga imaju obje ove krivulje jednu tačku na pravcu M_1M_2 zajednički i to onu, u kojoj pravac najkraće udaljenosti zrakâ m_1, m_2 siječe spojnicu M_1M_2.

Ploha će Π, poradi toga, što je ravnocrtna ploha trećega reda, imati „jednostavni" *(S)* i „dvostruki" pravac *(d)*. Pošto su sve izvodnice plohe Π: $a, b, c, \ldots$, sa ravninom μ_1 paralelne, to će sve sjeći neizmjerno daleki pravac (S_∞) te ravnine. Lako će se pokazati, da je ovaj pravac „jednostavni pravac" plohe.

Ravnina μ_1 sadržaje dakle po prijašnjem jednu izvodnicu q plohe Π, a i njezinu (jednostavnu) ravnalicu S_∞. Istražit ćemo, nalazi li se u μ_1 još koja izvodnica plohe. Ravnina μ_1 siječe ν_1 i ν_2 u pravcima p'_1 i q, gdje je q izvodnica plohe u M_1, a p'_1 sa izvodnicom p, koja prolazi kroz M_2, paralelno. Izvodnica je q smjer najkraće udaljenosti za korespondentne zrake q_1 i q_2 temeljnih pramenova. Za to će q_1 stojati na q okomito, ali u opće ne će pasti sa p' zajedno, jer p'_1 i q ne tvore pravi kut.[1]

Pravac p'_1 možemo smatrati zrakom pramena (M_1, ν_1) pa će za nju kao takovu morati resultirati njeka izvodnica p'' plohe Π, koja na p'_1 i p'_2 stoji ujedno okomito, gdje je p'_2 zraka u pramenu (M_2, ν_2) koja je zraci p'_1 korespondentna.

Za izvodnicu će p'' plohe morati s njom povučena paralela p''' ležati u μ_1, pa će za to p''' biti okomito na p'_1. Poradi toga dakle, što će p'' sjeći zraku p'_1 dakle i ravninu μ_1 u jednoj njezinoj tački, a ujedno kao izvodnica plohe biti sa μ_1 paralelno, morati će p'' posve ležati u μ_1. Sjecišna će tačka P''' izvodnice p'' sa zrakom p'_2 pramena (M_2, ν_2) ležati u q, jer i q i p'' leže u istoj ravnini μ_1. Ujedno će u q ležati i sjecišna tačka izvodnice q i korespondentne zrake q_2. Drugim riječima, izvodnica će q sjeći krivulju drugoga stupnja (k_2), koja je geometrijsko mjesto probodišta sviju izvodnica plohe Π sa ravninom ν_2, u dvjema realnim tačkama. Iz gornjega izlazi, da je sjecišna tačka pravaca q i q_2 diralište ravnine μ_1 kao tangencijalne ravnine plohe Π, a sjecišna tačka P''' pravaca q i p'_2 tačka dvostruke ravnalice plohe, jer tom tačkom prolaze dvije izvodnice plohe, t. j. q i p'. Za to zaključujemo:

[1] To se vidi odatle, što će za iste ravnine ν_1 i ν_2 i tačke M_1 i M_2 ravnina μ_1 zauzeti razne položaje, koji su ovisni o izboru dvaju para korespondentnih zraka, koji određuje temeljne pramenove.

Digitized by Google

U ravnini se μ_1 (ili μ_2) nalaze osim neizmjerno dalekog pravca S_∞, koji sijeku sve izvodnice plohe Π, *još dvije njezine izvodnice. Pravac je dakle S_∞ jednostavna ravnalica plohe.*

Kao što smo tačku P''' dvostruke ravnalice našli u ravnini τ_2, tako ćemo i tačku Q''' ove ravnalice naći u ravnini τ_1. Ona je sjecišna tačka krivulje drugoga stupnja (k_1), (koja ide kroz M_1, te je mjerstveno mjesto sjecišta sviju izvodnica plohe Π sa τ_1), sa pravcem p, koji je izvodnica plohe u M_2. Spojnica tačaka P''' i Q''' biti će dvostruki pravac plohe (d). Taj pravac siječe svaku od krivulja drugoga stupnja k_1 i k_2, i to u tačkama Q''' dotično P'''. No prije smo našli, da se i k_1 i k_2 sijeku u jedinoj tački M_1 pravca M_1M_2. Ova tri elementa određuju sve ostale izvodnice plohe Π, jer su dostatan uvjet za općenito određenje plohe.[1] Njihov je međusobni položaj u našem slučaju implicite takav, da su svi pravci, koji sva ona tri elementa sijeku, sa ravninama μ_1 i μ_2 paralelni.

3. Poradi toga, što će dvostruka ravnalica (d) plohe sjeći sve njezine izvodnice, morat će sjeći i izvodnicu m plohe, koja se ima držati najkraćom udaljenošću ujedinjenog korespondentnog para zraka m_1, m_2.

U ravnini σ, koja je položena pravcem M_1M_2 i izvodnicom m plohe, morat će probodišta sviju izvodnica $a, b, c, \ldots$., (osim izvodnice m) tvoriti krivulju drugoga reda k_σ, i to za to, jer σ ne prolazi niti dvostrukom niti jednostrukom ravnalicom plohe Π. U ostalom se krivulja k_σ može konstruirati iz dvaju projektivnih pramena zraka na slijedeći način. Pošto je ravnina σ zajednička korespondentna ravnina obaju svežanja drugoga reda (M_1^2) i (M_2^2), to će svaki od ovih svežanja sjeći ravninu σ u pramenu zraka prvoga reda (M_1, σ) dotično (M_2, σ), koji sa odnosnim svežnjevima leže perspektivno, pa koji su poradi projektivnosti onih svežanja sami projektivni. Pravac M_1M_2 *ne će biti* zajednička korespondentna zraka onih pramenova. Ravnina je najme τ_1 tangencijalna ravnina čunja (M_1^2). Ta ravnina siječe korespondentnu ravninu svežnja (M_2^2) u onoj izvodnici plohe, koja leži u τ_1, t. j. u p. U temeljnom pramenu (M_2, τ_2) korespondira izvodnici p ona zraka p_2, koja na p stoji okomito. Za ravninu će dakle τ_1 biti u svežnju (M_2^2) korespondentna ravnina (pp_2). U opće će ravnina (pp_2) biti od ravnine μ_2 posve različita u svežnju (M_2, τ_2), jer po predašnjoj tački ne

[1] Vidi E. Weyr, Geom. d. räuml. Erzeugn. ein-zweideutiger Gebilde, etc., p. 31.

Digitized by Google

moraju p'_1 i q zatvarati pravi kut. Odatle se već vidi, da ravnina μ_2 (i μ_1) u svojim svežnjevima ne projicira pravce p dotično q, pa odatle opet izlazi, da će u ovim ravninama ležati izvodnice, koje su sa p i q odijeljene. Na to se svraćamo u tački 5.

Korespondentne ravnine ν_1 i (pp_2) u svežnjevima (M_1^2) i (M_2^2) sjeći će dakle ravninu σ u M_1M_2 i njekom pravcu $p_2\sigma$, koji će u pramenovima (M_1, σ) i (M_2, σ) biti korespondentni, jer su presječnice ravnine σ sa dvjema korespondentnim ravninama onih svežanja drugoga reda.

Na isti će način za ravninu ν_2, kao ravninu svežnja (M_2^2), u svežnju (M_1^2) korespondirati njeka ravnina (qq_1), koja prolazi izvodnicom q u ν_2 i njezinom korespondentnom zrakom q_1 u pramenu (M_1, ν_1). Ravnina će ν_2 i (qq_1) sjeći ravninu σ u pravcima M_2M_1 i nekom pravcu $q_1\sigma$, koji će u pramenovima (M_2, σ) i (M_1, σ) biti korespondentni. Vidimo dakle, da će u ovim pramenovima zraci M_1M_2 dotično M_2M_1 korespondirati zrake $p_2\sigma$ i $q_1\sigma$, pa da će za to proizvod ovih projektivnih pramenova biti krivulja drugoga reda k_σ. Možemo dakle reći:

Krivulja drugoga reda (k_σ), koja je presjek plohe Π s onom ravninom σ, koja prolazi pravcem M_1M_2 i pravcem najkraće udaljenosti (m) ovog ujedinjenog para korespondentnih zraka, prolazi tačkama M_1 i M_2.

Krivulja će k_σ pravac m, koji s njom čini presjek trećega reda, sjeći u dvjema tačkama. Ove će se tačke moći konstruirati onda, ako nam bude poznata tačka M_3, koja je presjek pravca M_1M_2 sa najkraćom udaljenosti m, koja mu pripada. Jedna će od traženih sjecišnih tačaka biti tačka dvostruke ravnalice d, pa će se ploha Π i opet moći konstuirati iz k_σ, d i direkcione ravnine μ, neodvisno o temeljnim pramenima.

4. Ploha će Π u glavnom pokazati njeke osebine, koje se tiču općeg oblika, uzmemo li u obzir, da dužina M_1M_2 može biti različita, da će kut, koji tvore obje temeljne ravnine ν_1 i ν_2 biti oštar, pravi ili tupi, napokon, da će smisao, u kojem se kreću zrake u jednom od temeljnih pramenova biti istoznačan ili protivan smislu kretnje u drugom temeljnom pramenu. Što se tiče dužine M_1M_2, to će ona najmanje utjecati bitno na oblik plohe, pa ćemo za ovu dužinu pretpostaviti, da je konačna.

Kako kod plohe Π dolazi u obzir metrična okolnost, t. j. ***najkraća*** udaljenost između korespondentnih zraka temeljnih pramenova, to je jasno, da će prikloni kut ravnina ν_1 i ν_2 znatno utje-

Digitized by Google

cati na smjerove pojedinih izvodnica a, b, c, ... plohe Π. Istražit ćemo, u koliko utječe rečeni prikloni kut i kret zraka u pramenima na tačku M_3, u kojoj izvodnica m siječe pravac M_1M_2.

Zamislit ćemo ravnine r_1 i r_2 ujedinjene u r_2 tako, da će u ovoj ravnini ležati perspektivni pramenovi (M_1, r_1) i (M_2, r_2) sa zajedničkom korespondentnom zrakom M_1M_2.

Gledamo li na pramenove iz tačaka na okomicama, postavljenim u M_1 i M_2, to će kretnje korespondentnih zraka pramenova biti ili istoznačne ili protivne.

U prvom će slučaju perspektivni presjek sjeći M_1M_2 u nekoj tački M_4, koja će se nužno nalaziti *izvan* dužine $\overline{M_1M_2}$, a u drugom slučaju u nekoj tački M_3, koja će se nalaziti između tačaka M_1 i M_2.

Uzet ćemo korespondentne dvije zrake x_1 i x_2 obaju pramena, koje se sijeku u tački X, pak ćemo pretpostaviti, da su pramenovi protivne kretnje. Okomica x, postavljena u X na r_2 bit će smjer najkraće udaljenosti za odabrani korespondentni par.

Okrenemo li sad pramen (M_1, r_1) oko M_1M_2, to će najkraća udaljenost za x_1 i x_2 doći u novi neki položaj. Kad pramen (M_1, r_1) bude opet uslijed postojane kretnje pao u ravninu r_2, to će zraka x_1 sjeći zraku x_2 u njekoj tački X', a najkraća će udaljenost za ovaj položaj biti pravac x', koji u X' stoji na r_2 okomito. Isto će vrijediti za svaki par korespondentnih zraka obaju pramena. Sve će tačke A, B, C, ..., perspektivnog presjeka (u) u prvobitnom položaju preći uslijed kretnje u tačke A', B', C', ..., pa će sve ove tačke ležati na pravcu (u), koji M_1M_2 siječe u tački M_4.[1]

I za sjecišnu će tačku M_3 ujedinjenog korespondentnog pramena (m_1, m_2) vrijediti ovaj zakon, pak će se tačka M_3 uslijed kretnje pramena (M_1, r_1) pomicati sve dalje na pravcu M_1M_2 i doći u tačku M_4 onda, kad pramen (M_1, r_1) padne po drugi put u ravninu r_2.

Jesu li pramenovi (M_1, r_1) i (M_2, r_2) u probitnom položaju gledom na kret korespondentnih zraka istoznačni, to će za ovaj njihov položaj perspektivni presjek sjeći pravac M_1M_2 u tački M_1, a kretnjom prvoga pramena oko M_1M_2 doći će ova tačka napokon u M_3, koja se nalazi između tačaka M_1 i M_2 onda, kad (M_1, r_1) padne opet u ravninu r_2.

[1] Spominjem nuzgredno, da će tačke M_1, M_2, M_3 i M_4 biti harmonijske.

Digitized by Google

Za njeki stanoviti prikloni kut ravninâ τ_1 i τ_2 bit će dakle sjecište ujedinjenog para zraka m_1 i m_2 u stanovitoj njekoj tački M'_3, koja se nalazi između M_3 i M_4 i između tačaka M_1 i M_2 ili izvan te dužine. već prema protivnom ili istoznačnom smislu kretnje obaju temeljnih pramena, pretpostavljajući, da je onaj prikloni kut šiljast. Ako je prikloni kut (τ_1, τ_2) tup, nastat će upravo recipročni snošaji u njegovom suplementnom priklonom kutu, koji je šiljast.

Za stanoviti prikloni kut $(\tau_1 \tau_2)$ primicat će se dakle izvodnice $a, b, c, \ldots$, plohe II sve više pripadajućoj tački M'_3 na $M_1 M_2$, pa će okomica u M'_3, postavljena na $M_1 M_2$, biti tražena izvodnica m plohe, (gdje se ravnina $(m, M_1 M_2)$ dade naći pomoću direkcione ravnine ϱ_1 ili ϱ_2). K onoj će se tački M'_3 primicati sve najkraće udaljenosti korespondentnih parova zraka temeljnih pramenova (M_1, τ_1) i (M_2, τ_2), čim je prikloni kut $(\tau_1 \tau_2)$ njihovih ravnina određen stalni kut.

Ako je poznat dvostruki pravac (d) plohe, moći će se tačka M'_3 naći na ovaj način. Direkciona ravnina (ϱ_1) siječe ravninu, postavljenu u M_1 okomito na $M_1 M_2$ u pravcu m', koji je s izvodnicom m paralelan. Pošto dvostruki pravac siječe sve izvodnice plohe II, sjeći će i pravac m. Potražimo li dakle probodište dvostrukog pravca d sa ravninom σ, (ta je ravnina položena pravcima $M_1 M_2$ i m), dobit ćemo tačku pravca m, a ovaj pravac kao okomicu, postavljenu u dobivenom probodištu na $M_1 M_2$. Njezino je nožište tačka M'_3.

Osobite vlastitosti pokazuje ploha II, ako svi korespondentni parovi zraka pramenova (M_1, τ_1) i (M'_2, τ'_2) tvore „prave" kutove. Na ovaj ćemo se slučaj svratiti kod istraživanja snošaja plohe II prema linearnom kompleksu, koji je određen temeljnim pramenima.

5. U tački smo 2. opazili, da će pravac q, koji je izvodnica plohe II kroz M_1 u τ_2 sjeći krivulju drugoga reda k_2, (u kojoj još II siječe τ_2), u dvjema tačkama. Isto će tako izvodnica p plohe, koja prolazi središtem M_2, a leži u τ_1, sjeći krivulju drugoga reda k_1 u τ_1 u dvjema tačkama, i to s toga razloga, jer pravci p'_1 i q_1 u kojim direkciona ravnina ϱ_1 siječe ravnine τ_1 i τ_2, nisu u opće pravokutno priklonjeni. Za plohu će se dakle na poznati način lako odrediti kuspidalne tačke, kuspidalne ravnine i singularne izvodnice. Trebat će samo na k_1, k_2 ili k_σ položiti tangencijalne ravnine paralelno sa direkcionom ravninom ϱ_1. Sve će ove tri krivulje, kao i sve ostale krivulje drugog i trećeg reda na plohi

Digitized by Google

imati ove tangencijalne ravnine zajednički.[1] Probodišta ovih dviju ravnina sa dvostrukim pravcem *(d)* plohe jesu kuspidalne tačke, ove dvije ravnine kuspidalne ravnine, a izvodnice, koje spajaju kuspidalne tačke sa diralištima na k_1 (ili k_2, k_3, ...) bit će obje singularne izvodnice plohe.

Za osobiti položaj ravnina η_1 i η_2 bit će kuspidalne tačke i ravnine kao i singularne izvodnice u specijalnom položaju.

Siječe li najme direkciona ravnina μ_1 ravnine η_1 i η_2 u takovim pravcima p' i q, koji stoje međusobno *okomito*, to će se pokazati, da obje izvodnice q i p'' plohe, koje osim S_∞ leže u ravnini μ_1, padaju zajedno u pravac q. Valja naglasiti, da će ovaj slučaj moći bez obzira na prikloni kut temeljnih ravnina η_1 i η_2 ovisiti o međusobnom snošaju temeljnih pramenova, jer ravninu μ_1 željene vlastitosti možemo odabrati, a iz nje odrediti dva para korespondentnih zraka za temeljne pramenove. Obratno će za njeki stanoviti snošaj temeljnih pramenova biti za ovaj slučaj potrebno određenje priklonog kuta $(\eta_1 \eta_2)$.

Jer smatramo li opet za čas p'_1 zrakom pramena (M_1, η_1), to će izvodnica plohe, koja na p'_1 i na njezinoj korespondentnoj zraci p'_2 u (M_2, η_2) stoji okomito, biti s njekom zrakom pramena (M_1, μ_1) paralelna. Ova će zraka morati biti na p'_1 okomita. U rečenom će dakle posebnom slučaju izvodnica p'' biti s pravcem q paralelna, jer taj pravac leži u μ_1 te stoji na p'_1 okomito, pak je ujedno jedini mogući pravac u μ_1, koji zadovoljava stavljenom uvjetu. Pošto će pak p'' sjeći p'_1, koji se i sâm nalazi u μ_1, morat će on sa q pasti zajedno, jer p'' siječe i pravac q. Za taj će slučaj pravci q i p'', koji dakle padaju zajedno, doticati krivulju k_2 u nekoj tački C_2 i to u sjecištu dvostruke ravnalice d sa krivuljom k_2^2. Položi li se tačkom C_2 ravnina paralelna sa μ_1, to će ona doticati krivulju k_2 u C_2, te u istoj tački sjeći dvostruku ravnalicu d. Ova će dakle ravnina γ_2 biti kuspidalna ravnina plohe, a tačka C_2 njoj pripadajuća kuspidalna tačka plohe. Izvedemo li isto to za izvodnicu p kroz M_2 i krivulju k_1, dobit ćemo na ovoj kuspidalnu tačku C_1, a na isti način i njoj pripadajuću kuspidalnu ravninu γ_1.

Uzmemo li u obzir, da je izvodnica p plohe sa p'_1 paralelna, slijedi:

Jesu li obje izvodnice p i q, koje leže u ravninama η_1 i η_2 temeljnih pramenova, međusobno okomite, to će one biti ujedno sin-

[1] Weyr, l. c. p. 46.

Digitized by Google

gularne izvodnice plohe Π. *Kuspidalne su tačke* C_1 *i* C_2 *plohe dirališta ovih izvodnicâ sa krivuljama* (k_1 *dotično* k_2) *drugoga reda, koje leže na plohi* Π *i ujedno u ravninama* r_1 *dotično* r_2.

Pošto su za ovaj slučaj p i q međusobno okomiti pravci, to će i p_2 i q_2 biti međusobno okomiti, (jer će u tom slučaju paralela p'_2, povučena tačkom M_1 sa p_2, pasti u q_2) i to s razloga, što je p okomito na p_2 i ujedno okomito na p_1, a q_2 okomilo na q, dakle ujedno i na p_2. Isto će tako biti okomiti p_1 i q_1, jer će q_1 pasti zajedno sa p'_1, pošto je q_1 okomito na q, a p'_1 okomito na p_1. Iz toga slijedi općenito, ako uvažimo, da su parovi p_1q_1 i p_2q_2 krakovi korespondentnih pravih kutova u temeljnim pramenima:

Prolazi li direkciona ravnina (ϱ_1) *krakom* (q_1) *pravoga kuta u temeljnom pramenu* (M_1r_1), *pak na korespondentnom kraku* (q_2) *korespondentnog pravog kuta u* (M_2r_2) *stoji okomito, to će pravci* (p *i* q) *najkraćih udaljenosti za obadva para krakova onih pravih kutova biti singularne izvodnice plohe* Π.

6. Iz ovih razmatranja proizlazi, da je ploha Π njeki posebni *konoid* sa dvije ravnalice (d i S_∞) prvoga reda i jednom ravnalicom (k) drugoga reda, gdje za k možemo uzeti kojigod njezin presjek drugoga reda, koji ne degenerira. U opće razlikujemo tri vrsti konoida trećega reda prema tome, kojoj vrsti krivulja pripada ravnalica drugoga reda (k). Poznato je, da će svi presjeci drugoga reda na plohi Π bili istovrsni s ravnalicom k.[1]

U našem će slučaju ploha Π, koja je geometrijsko mjesto pravaca najkraće udaljenosti za korespondentne parove zraka temeljnih projektivnih pramenova (M_1, r_1) i (M_2, r_2), moći sadržavati *samo elipse* kao presjeke s ravninama, koje prolaze jednom njezinom izvodnicom.

Trebat će dakle dokazati, da nijedna od izvodnica $a, b, c, \ldots$, ne može ležati neizmjerno daleko. Vidi se to već odatle, što nijedna zraka u obadva pramena ne leži neizmjerno daleko, jer su M_1 i M_2 tačke u konačnosti, pak i odatle, što nijedan par korespondentnih zraka ne pruža paralelnih pravaca, pošto su uvijek dvije korespondentne zrake u različitim ravninama r_1 i r_2.

Preostala bi dakle još jedina mogućnost, da najkraća udaljenost ujedinjenog para zraka bude neizmjerno dalek pravac.

U tački smo 4. našli, da će izvodnica m plohe sjeći pravac M_1M_2 u njekoj stanovitoj tački M'_3, koja je ovisna o priklonom

[1] de la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, II. éd., II. P., p. 161—168.

Digitized by Google

kutu $(r_1 r_2)$ i o međusobnom snošaju temeljnih pramenova. Moći će nastati slučaj, da perspektivni presjek (u) pramenova (M_1, r_2) i (M_2, r_2), kad se oni nalaze u istoj ravnini r_2, siječe pravac $M_1 M_2$ u njekoj tački M_3, koja je središnja tačka dužine $M_1 M_2$.

Zaokrene li se pramen (M_1, r_1) oko $M_1 M_2$, dok opet ne dođe u ravninu r_2, to će u novom položaju perspektivni presjek (u') obaju pramena biti pravac, koji poradi harmoničnosti četiriju tačaka M_1, M_2, M_3, M_4 siječe pravac $M_1 M_2$ u tački M_4, koja je neizmjerno daleka.

Za vrijeme kretnje pramena (M_1, r_1) proći će dakle presječna tačka (M'_3) izvodnice m i pravca $M_1 M_2$ sve tačke neizmjerno velike dužine $M_3 M_4^{\infty}$, pa će pravac m biti onda neizmjerno daleka izvodnica, koja u M_4^{∞} stoji na $M_1 M_2$ okomito, kad ravnina pramena (M_1, r_1) padne u ravninu r_2. Za ovaj će pak položaj svi pravci najkraćih udaljenosti prolaziti tačkama $A', B', C', \ldots$, perspektivnog presjeka (u'), pa o vitoperoj plohi trećega reda ne može biti govora, jer svi oni pravci leže u istoj ravnini.

Posve isto vrijedi i za slučaj, da su temeljni pramenovi (M_1, r_2) i (M_2, r_2) u takovom istoznačnom snošaju, da perspektivni presjek (u) siječe $M_1 M_2$ u neizmjerno dalekoj tački M_3^{∞}, jer će u tom slučaju izvodnica m pasti doduše u neizmjernu daljinu, ali će ploha Π degenerirati, jer sve izvodnice njezine prolaze tačkama A, B, C, ..., a leže u istoj ravnini.

Nijedna dakle krivulja drugoga reda na plohi Π, koja je geometrijsko mjesto probodišta sviju izvodnica plohe s njekom ravninom (a ova siječe plohu još u jednoj izvodnici), ne će moći imati neizmjerno daleke tačke, jer nijedna izvodnica ne leži neizmjerno daleko, pa za to ne će nijedna od tih krivulja biti ni parabola ni hiperbola.

Od važnosti će za plohu Π biti okolnost, da li dvostruki pravac (d) siječe krivulje drugog stupnja, koje se na njoj nalaze, u realnim ili imaginarnim tačkama. Za tu svrhu trebat će u pojedinom slučaju istražiti, siječe li izvodnica m krivulju drugog stupnja k_σ, koja je presjek plohe s ravninom σ, u realnim ili imaginarnim tačkama.

Preostaje nam jošte, da se ispita, bi li ploha Π mogla degenerirati u ravnocrtnu plohu drugoga stupnja. Ta bi ploha poradi direkcione ravnine μ_1 mogla biti samo hiperbolički paraboloid. Poznato je pak,[1] da će ploha trećega reda preći onda u plohu drugog stupnja,

[1] Weyr, l. c., p. 56.

Digitized by Google

ako njezine kuspidalne tačke padaju zajedno. U tom bi dakle slučaju morale tangencijalne ravnine nekog čunjosjeka na plohi Π, koje se ujedno s direkcionom ravninom paralelne, sjeći dvostruku ravnalicu u jednoj te istoj tački. To će se moći dogoditi samo onda, ako rečeni čunjosjek degenerira, pak je sâm jedna izvodnica plohe, koja je sa direkcionom ravninom paralelna, a siječe dvostruku ravnalicu. S toga bi razloga sve krivulje drugoga stupnja na plohi Π degenerirale u pravce, dakle i one, koje se nalaze u temeljnim ravninama r_1 i r_2. Za ove krivulje k_1 i k_2 znamo, da se iz M_2 dotično M_1 projiciraju svežnjevima drugoga reda (M_2^2) i (M_1^2). Ovi bi pako, da uzmognu projicirati degenerirane krivulje drugog stupnja morali sami degenerirati, pa bi projektivni pramenovi (M_2, r_2), (M_2, p_2) i (M_1, r_1), (M_1, p_1) morali biti perspektivni, što nije nikako moguće, jer za ove pramenove znamo, da su im korespondentne zrake međusobno okomite, pa da za to ne može nijedan korespondentni par biti ujedinjen.

Ploha Π ne će dakle moći biti za nikakav međusobni položaj temeljnih pramenova ploha drugoga reda.[1]

Prikazao sam ovdje proizvođenje plohe Π iz Sylvestrova određenja linearnog kompleksa poradi njezinih snošaja prema temeljnim pramenima. U budućoj ću raspravi objelodaniti istraživanja o odnošajima ove plohe prema ništičnom sustavu, koji je u linearnom kompleksu sadržan.

Spominjem i to, da se i za tetraedralni kompleks, koji nastaje na Sylvesterov način, dade konstruirati na isti način ploha višega reda, na koju me je upozorio Reye. Ova je ploha u opće šestoga reda, ali se specijalnim položajem temeljnih pramenova dade njezin red znatno reducirati. Na isti način kao i za plohu Π naći se može lako, da će izvodnice ove plohe u tetraedralnom kompleksu biti s izvodnicama čunja drugoga stupnja paralelne, pa da će se iz središtâ temeljnih pramenova projicirati svežnjevima ravnina trećega reda.

[1] Na slučaj, gdje je M_1 ili M_2 neizmjerno daleko, svratit ću se kasnije.

Digitized by Google

O redovima jednogranih funkcija.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. prosinca 1900.

NAPISAO DR. BOGDAN GAVRILOVIĆ,
prof. Velike škole u Biogradu.

Neka su funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ jednograne u polju S ograničenom nekom konturom C. U tom polju S uzeću ma gdje jednu tačku a i pretpostaviću da je ta tačka a ili obična tačka, ili pol, ili izolovana esencijalna tačka funkcija $\varphi(z)$ i $\psi(z)$. Tačka a može n. pr. po tome biti obična tačka funkcije $\varphi(z)$, a esencijalna tačka funkcije $\psi(z)$, ili pol funkcije $\varphi(z)$, a esencijalna tačka funkcije $\psi(z)$, ili esencijalna tačka obiju funkcija i t. d.

Red funkcije $\varphi(z)\,\psi(z)$ biće u sva tri slučaja cio broj.[1] Taj broj određen je ovim integralom:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{[\varphi(z)\,\psi(z)]'}{\varphi(z)\,\psi(z)}\,dz.$$

Taj integral se proteže na periferiju nekog beskonačno malog kruga, čije je središte tačka a. Jasno je da se taj integral može rastvoriti u zbir ovih dvaju integrala:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz.$$

To znači da je red proizvoda ma kakvih dviju jednogranih funkcija predstavljen zbirom redova tih

[1] *Weierstrass.* Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen, Werke t. II. p. 77 i moju raspravu štampanu u 139 knjizi Rada jugoslav. akademije pod natpisom „O ostacima jednogranih funkcija“, p. 29.

Digitized by Google

funkcija.[1] Po toj teoremi vidi se neposredno da funkcije $\varphi(z)$ i $\varphi(z)\psi(z)$ imaju isti red u tački a, ako je u toj tački red funkcije $\psi(z)$ nula. Kad se dakle traži red neke funkcije u nekoj tački, onda često nije potrebno tražiti ostatak logaritamskog izvoda te funkcije, već ostatke logaritamskih izvoda mnogo prostijih funkcija.

Neka je na primjer

$$f(z) = \frac{z\, e^{\frac{1}{z}}}{1+z}.$$

Tačka $z = 0$ je esencijalna tačka te funkcije, a red njezin je predstavljen brojem 1 u tački $z = 0$, jer je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -1 + z - z^2 + \ldots + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

To se vrlo lako može potvrditi, kad se ima u vidu malo čas pomenuto pravilo. Funkciji

$$\frac{1}{1+z}$$

očevidno tačka $z = 0$ niti je nula, niti kakav singularitet. Red te funkcije je dakle u toj tački tačno $= 0$. O toj funkciji prema tome u ovaj mah ne ćemo voditi računa. To znači da će red funkcije $f(z)$ biti isti onakav, kakav je i red funkcije $ze^{\frac{1}{z}}$, a red te funkcije je predstavljen brojem 1, jer je u toj tački red funkcije $\varphi(z) = z$ očevidno $= 1$, a red funkcije $\psi(z) = e^{\frac{1}{z}}$ je očevidno $= 0$, pošto je

$$\left(e^{\frac{1}{z}}\right)' = -\frac{1}{z^2}\, e^{\frac{1}{z}}.$$

[1] Kad bi funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ bile meromorfne u polju S, onda je to pravilo samo sobom jasno. V. *Hoüel.* Calcul infinitésimal, t. III. p. 296.

Digitized by Google

Neka je sad

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Tada je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

pa je s toga i

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz,$$

t. j. red količnika ma kakvih dviju jednogranih funkcija predstavljen je razlikom redova tih funkcija.

Ta teorema može se primijeniti i na tačku u beskonačnosti. Kad bi na ime tačka $z = \infty$ bila ili obična tačka, ili pol, ili esencijalna tačka funkcijâ $\varphi(z)$ i $\psi(z)$, onda bismo njen red dobili ovako. Zamijenićemo z sa $\frac{1}{\zeta}$ i uzećemo da je

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = F(z), \qquad \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \Phi(z).$$

Tada će red funkcije $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ u tački $z = \infty$ biti predstavljen ovom razlikom integrala:

$$\frac{1}{2\pi i}\int -\frac{1}{\zeta^2} F\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int -\frac{1}{\zeta^2}\,\Phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta,$$

a to će reći ovom razlikom integrala:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\zeta^2}\,\Phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\zeta^2}\,F\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta,$$

a to smo i tvrdili. Ako je dakle red funkcije $\varphi(z)$ u tački $z = a$ predstavljen brojem m, a red funkcije $\psi(z)$ brojem n, onda će red

Digitized by Google

funkcije $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ biti broj $m-n$, a red funkcije $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ broj $n-m$. Redovi funkcija $f(z)$ i $\frac{1}{f(z)}$ jesu dakle i u esencijalnim tačkama jednaki, ali suprotno označeni. Tako bi na primjer red funkcije

$$f(z) = \frac{1+z}{z\, e^{\frac{1}{z}}}$$

u esencijalnoj tački $z = 0$ bio izražen brojem -1. Prema tome smijemo tvrditi ovo: ako je red neke funkcije $f(z)$ u nekoj običnoj ili u nekoj esencijalnoj tački njezinoj izražen nulom, onda je u toj tački i red funkcije $\frac{1}{f(z)}$ također $= 0$.

Uzmimo sad opet dvije jednograne funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ i pretpostavimo da te funkcije u svima tačkama neke površine zatvorene konturom C imaju isti red. Tada će u svakoj tački te površine biti

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\,dz = 0,$$

t. j. biće

$$\int\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right)dz = 0.$$

Uzmimo sad da je funkcija

$$f(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

holomorfna u polju, o kome je u ovaj mah riječ; tada će se ta funkcija u tom polju moći razviti u red po Taylor-ovu obrascu. Ako je dakle

$$u = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

Digitized by Google

onda će biti

$$\frac{d\,logu}{dz} = f(z)$$

ili

$$logu = \int f(z)\,dz.$$

Pošto je funkcija $f(z)$ holomorfna, to će i posljednji integral predstavljati jednu u polju, ograničenom konturom C, holomorfnu funkciju. Označivši tu funkciju sa $g(z)$, moći ćemo prema tome reći, da će funkcija $g(z)$ imati u pomenutom polju karakter jedne cijele funkcije. Dobili smo dakle ovu teoremu:

Teorema. Ako funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ imaju u svima tačkama nekog polja S isti red, ako je razlika logaritamskih izvoda tih funkcija holomorfna, onda će logaritam količnika tih funkcija biti holomorfna funkcija u svima tačkama polja S, ma te tačke bile i esencijalne tačke funkcijâ $\varphi(z)$ i $\psi(z)$.

Vratimo se sad funkciji $g(z)$. Kako je

$$logu = g(z),$$

biće

$$u = e^{g(z)}.$$

S druge strane je opet

$$u = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

a kad se ta dva obrasca uoče, onda se vidi da je

$$\varphi(z) = \psi(z)\,e^{g(z)}. \qquad (1)$$

Tim obrascem je potvrđena ova teorema:

Teorema. Kad je u dvije jednograne funkcije $\varphi(z)$ i $\psi(z)$, ma one i ne bile meromorfne, u svima tačkama nekog polja S razlika logaritamskih izvoda tih funkcija holomorfna, onda se te dvije funkcije razlikuju samo jednim faktorom $e^{g(z)}$, u kome je sa $g(z)$ označena neka u polju S holomorfna funkcija.

Digitized by Google

Tom teoremom obuhvaćene su dakle ne samo sve jednograne meromorfne funkcije, već u opće i sve ostale transcendentne funkcije i u tome nju treba smatrati kao generalizaciju jedne osnovne, u teoriji meromorfnih funkcija poznate teoreme.[1] Kako će sad obrazac (1) stajati prema teoriji Weierstrass-ovih „primarnih faktora" i prema poznatoj Mittag-Lefflerovoj teoremi, to ćemo pokazati drugom jednom prilikom.

[1] *Weierstrass:* Zur Theorie etc. Werke II. p. 98. i *Forsyth:* Theory of functions of a complex variable, p. 80—81.

Digitized by Google

O pfafijanima.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. prosinca 1900.

NAPISAO DR. BOGDAN GAVRILOVIĆ,
prof. Velike škole u Biogradu.

Poznato je da se Cayley mnogo bavio o ispitivanju osobina koso simetričnih determinanata. Između ostaloga dokazao je Cayley,[1] da je koso simetrična determinanta parnoga stepena kvadrat nekog potpuno određenog polinoma. Taj polinom je važna funkcija elemenata pomenute koso simetrične determinante, važna po tome, što se takve funkcije javljaju u Integralnom Računu u znamenitoj Pfaff-ovoj problemi. Mi ćemo taj polinom bilježiti sa P i zvaćemo ga po Cayley-u pfafijanom.

Uočimo sada ovu koso simetričnu determinantu parnoga stepena:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & \dots & a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & \dots & a_{4,2n-1} & a_{4,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1,1} & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & a_{2n-1,4} & \dots & 0 & a_{2n-1,2n} \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & a_{2n,4} & \dots & a_{2n,2n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

[1] *Cayley:* Sur les déterminants gauches. Journal für die reine und angew. Mathem. t. XXXVIII. i Collected mathem. Papers, t. I. p. 410.

Digitized by Google

Jasno je da je u toj determinanti Δ prvi minor elementa prve vrste i prve kolone također koso simetrična determinanta. Ako je sad $\varkappa_{ik}$ prvi minor elementa a_{ik} te determinante, t. j. ako je $\varkappa_{ik}$ jedan potpuno određen drugi minor prvobitne koso simetrične determinante, onda se ta determinanta može ovako izraziti:[1]

$$\Delta = \left(\sum a_{1i}\sqrt{\varkappa_{i1}}\right)^2$$

$$= \left(a_{12}\sqrt{\varkappa_{22}} + a_{13}\sqrt{\varkappa_{33}} + \ldots + a_{1,\,2n}\sqrt{\varkappa_{2n,\,2n}}\right)^2, \qquad (1)$$

a po tome se vidi da je pfafijan P linearna funkcija elemenata prve vrste determinante Δ. Taj pfafijan predstavlja se ovim simbolom:

$$P = \begin{matrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ & & a_{34} & \ldots & a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & a_{2n-2,2n-1} & a_{2n-2,2n} \\ & & & & & a_{2n-1,2n} \end{matrix} \qquad (2)$$

Glavni član toga pfafijana je

$$a_{12}\ a_{34}\ a_{56}\ \ldots\ a_{2n-1,\,2n}.$$

U tome članu ima n elemenata, t. j. pfafijan P je pfafijan n-toga reda.

Zamislimo sad da smo u matrici pfafijana P preko elemenata $a_{13},\ a_{14},\ \ldots\ a_{1,\,2n-1},\ a_{1,\,2n}$ povukli prave linije pravcem glavne dijagonale njegove. Te prave zvaćemo zajedno sa glavnom dijagonalom prosto dijagonalama, a sve te dijagonale podijelićemo u dvije vrste: u neparne i u parne dijagonale. Neparne dijagonale biće glavna dijagonala i sve one dijagonale što prelaze preko elemenata $a_{11},\ a_{16},\ \ldots\ a_{1,\,2i},\ \ldots$, a parnim dijagonalama

[1] *Baltzer:* Theorie und Anwendung der Determinanten, p. 45.

Digitized by Google

zvaćemo dijagonale što prelaze preko elemenata a_{13}, a_{15}, ... $a_{1,2i+1}$, ... Po toj definiciji vidi se na prvi pogled ovo: kad je u nekog elementa a_{ik} zbir $i+k$ kazaljaka neparan broj, onda taj elemenat leži na neparnoj dijagonali i obratno, ako je zbir $i+k$ kazaljaka elementa a_{ik} paran broj, onda preko elementa a_{ik} mora prelaziti parna dijagonala. Ako dakle nazovemo elemenat a_{ik} parnim elementom pfafijana P, kad je zbir $i+k$ paran broj, a neparnim elementom, kad je $i+k$ neparan broj, onda ćemo smjeti tvrditi, da će svi parni elementi ležati na parnim, a svi neparni na neparnim dijagonalama.

Na primjer, pfafijan

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ & f & g & h & i \\ & & j & k & l \\ & & & m & n \\ & & & & p \end{matrix}$$

ima tri neparne i dvije parne dijagonale.

Promijenimo sad u matrici pfafijana P prvo znake svima elementima neparnih dijagonala. Tada ćemo dobiti ovaj pfafijan:

$$P' = \begin{matrix} -a_{12} & a_{13} & -a_{14} & \dots & a_{1,2n-1} & -a_{1,2n} \\ & -a_{23} & a_{24} & \dots & -a_{2,2n-1} & a_{2,2n} \\ & & -a_{34} & \dots & a_{3,2n-1} & -a_{3,2n} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & -a_{2n-2,2n-1} & a_{2n-2,2n} \\ & & & & & -a_{2n-1,2n} \end{matrix}$$

Promijenimo li obratno u matrici pfafijana P znake svima elementima parnih dijagonala, onda ćemo dobiti ovaj pfafijan:

$$P'' = \begin{matrix} a_{12} & -a_{13} & a_{14} & \dots & -a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ & a_{23} & -a_{24} & \dots & a_{2,2n-1} & -a_{2,2n} \\ & & a_{34} & \dots & -a_{3,2n-1} & a_{3,2n} \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{2n-2,2n-1} & -a_{2n-2,2n} \\ & & & & & a_{2n-1,2n} \end{matrix}$$

Digitized by Google

Pita se, kako stoje transformovani pfafijani P' i P'' prema prvobitnom pfafijanu P.

Da bih na to pitanje odgovorio, moraću obići Jacobi-jevu[1] interpretaciju simbola (2) i zamijeniću je drugom jednom, kojoj osnovu treba tražiti u razvijenom obliku (1) determinante Δ.

Prije svega pomenuću 1-vo, da u svakom članu pfafijana P ima kao i u osnovnom članu njegovu svega n elemenata i 2-go, da se u svakom članu javlja svaka između kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$, ali svaka samo jedanput. Ako je dakle sa $ijkl \ldots rs$ označena neka pemutacija tih kazaljaka, onda će u opće svaki član u razvijenom obliku pfafijana P morati biti ovog oblika:

$$\pm a_{ij}\, a_{kl} \ldots a_{rs}, \tag{3}$$

ali odmah treba primijetiti da obratno svi ti proizvodi (3) ne će biti članovi pfafijana P. Na primjer, zna se da je

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{34} \end{vmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}.$$

U razvijenom obliku toga pfafijana ima svega tri člana, a u tim članovima javljaju se samo ove tri permutacije kazaljaka:

$$1\,2\,3\,4, \qquad 1\,3\,2\,4, \qquad 1\,4\,2\,3$$

ili ove tri:

$$3\,4\,1\,2, \qquad 2\,4\,1\,3, \qquad 2\,3\,1\,4.$$

To znači da se sve permutacije kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$ ne javljaju u pfafijanu P, već samo neke između tih permutacija. Te permutacije dobijao je Jacobi određenim cikličkim permutovanjem i dokazao je[2] da ih svega ima

$$N = (2n-1)\,(2n-3) \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1$$

[1] *Jacobi:* Theoria novi multiplicatoris systemati aequat. different. Werke, t. IV. p. 420.

[2] *Jacobi,* ibid. p. 421.

Digitized by Google

i tim brojem N bio bi određen i broj svih članova u razvijenom obliku pfafijana n-toga reda.

Moja interpretacija simbola (2) biće sad ovo: Da bih dobio sve permutacije kazaljaka, koje se javljaju u članovima pfafijana P, poći ću sa osnovne permutacije $1\ 2\ 3\ \ldots\ 2n$ tih kazaljaka i spojiću elemenat 1 najprije s elementom 2, pa onda s elementom 3, ... i na posljetku s elementom $2n = m$. Tim putem dobiću ove sklopove:

$$1\ 2,\quad 1\ 3,\quad \ldots\quad 1m.$$

Pri tome ću ostale elemente osnovne permutacije ostaviti u prvobitnom rasporedu njihovu. Tada će svakom sklopu $1i$ odgovarati jedna permutacija ostalih $(2n - 2)$ elemenata osnovne permutacije. Tu permutaciju zvaću komplementarnom permutacijom sklopa $1i$. Tako bi n. pr. komplementarna permutacija sklopa $1\ 2$ bila $3\ 4\ \ldots\ m$; komplementarna permutacija sklopa $1\ 3$ bila bi $2\ 4\ \ldots\ m$ i t. d. Iza svakog takvog sklopa $1i$ napisaćemo sad komplementarnu mu permutaciju i dobićemo tada svega $m - 1 = 2n - 1$ permutacija elemenata $1, 2, 3, \ldots 2n$:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ m,\quad 1\ 3\ 2\ 4\ 5\ \ldots\ m,\ \ldots\ \ldots \qquad (4)$$

Sad ćemo iz svake komplementarne permutacije izvesti nov jedan niz permutacija i to po istom onom pravilu, po kome smo i malo čas izvodili permutacije (4) iz osnovne permutacije $1\ 2\ 3\ \ldots\ m$. Tada ćemo n. pr. iz permutacije $3\ 4\ 5\ \ldots\ m$ dobiti ovih $m - 3$ permutacija:

$$3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots\ m,\quad 3\ 5\ 4\ 6\ 7\ \ldots\ m,\quad \ldots\ \ldots \qquad (5)$$

i sve te permutacije ćemo napisati iza sklopa $1\ 2$. Dalje ćemo iz komplementarne permutacije $2\ 4\ 5\ 6\ \ldots\ m$ dobiti ovih $m - 3$ permutacija:

$$2\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots\ m,\quad 2\ 5\ 4\ 6\ 7\ \ldots\ m,\quad \ldots\ \ldots$$

i sve ćemo ih napisati iza sklopa $1\ 3$ i t. d.

Permutacije

$$5\ 6\ 7\ \ldots,\quad 4\ 6\ 7\ \ldots,\quad \ldots\ \ldots$$

Digitized by Google

bile bi komplementarne permutacije komplementarnih permutacija. S toga bismo te permutacije mogli zvati komplementarnim permutacijama drugoga reda, a samo permutovanje komplementarnim permutovanjem. Na taj način dobili bismo već

$$(m-1)\,(m-3) = (2n-1)\,(2n-3)$$

različitih permutacija kazaljaka $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Sad bismo opet po istom pravilu iz svake komplementarne permutacije drugoga reda mogli izvesti svega $m-5$ novih permutacija. Te permutacije ćemo opet napisati iza onog sklopa, uz koji se nalazila ta komplementarna permutacija i dobićemo tada svega

$$(m-1)\,(m-3)\,(m-5) = (2n-1)\,(2n-3)\,(2n-5)$$

permutacija kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$. Tako bismo stvarali komplementarne permutacije viših redova i na posljetku bismo komplementarnim permutovanjem dobili sve one permutacije kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$ koje se javljaju u pfaffijanu P, a broj njihov bio bi očevidno N.

Neka su nam na primjer date kazaljke $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Tada ćemo dobiti ove permutacije:

$$1\,2\,3\,4\,5\,6,\quad 1\,3\,2\,4\,5\,6,\quad 1\,4\,2\,3\,5\,6,\quad 1\,5\,2\,3\,4\,6,\quad 1\,6\,2\,3\,4\,5.$$

Komplementarne permutacije su u ovaj mah

$$3\,4\,5\,6,\quad 2\,4\,5\,6,\quad 2\,3\,5\,6,\quad 2\,3\,4\,6,\quad 2\,3\,4\,5,$$

a iz ovih se komplementarnim permutovanjem dobivaju ove permutacije:

$$\begin{array}{lll} 3\,4\,5\,6, & 3\,5\,4\,6, & 3\,6\,4\,5 \\ 2\,4\,5\,6, & 2\,5\,4\,6, & 2\,6\,4\,5 \\ 2\,3\,5\,6, & 2\,5\,3\,6, & 2\,6\,3\,5 \\ 2\,3\,4\,6, & 2\,4\,3\,6, & 2\,6\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,5, & 2\,4\,3\,5, & 2\,5\,3\,4. \end{array}$$

Komplementarne permutacije drugoga reda su u ovaj mah

$$5\,6,\quad 4\,6,\quad 4\,5,\quad 3\,6,\quad 3\,5,\quad 3\,4,$$

a te permutacije nemaju više svojih komplementarnih permutacija. Ako dakle permutaciju $1\,i\,j\,k\,r\,s$ $(i = 2, 3, 4, 5, 6;\ j, k, r, s = 3,$

Digitized by Google

4, 5, 6) označimo sa 1i (jkrs), onda će nam jasno biti da ćemo u ovaj mah komplementarnim permutovanjem dobiti ove permutacije:

$$\begin{array}{llll} 1\,2 & (3\,4\,5\,6, & 3\,5\,4\,6, & 3\,6\,4\,5), \\ 1\,3 & (2\,4\,5\,6, & 2\,5\,4\,6, & 2\,6\,4\,5), \\ 1\,4 & (2\,3\,5\,6, & 2\,5\,3\,6, & 2\,6\,3\,5), \\ 1\,5 & (2\,3\,4\,6, & 2\,4\,3\,6, & 2\,6\,3\,4), \\ 1\,6 & (2\,3\,4\,5, & 2\,4\,3\,5, & 2\,5\,3\,4). \end{array}$$

S toga su članovi u razvijenom obliku pfafijana

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{56} \end{array}\right|$$

ovo:

$$\begin{array}{lll} a_{12}\,a_{34}\,a_{56}, & a_{12}\,a_{35}\,a_{46}, & a_{12}\,a_{36}\,a_{45} \\ a_{13}\,a_{24}\,a_{56}, & a_{13}\,a_{25}\,a_{46}; & a_{13}\,a_{26}\,a_{45} \\ a_{14}\,a_{23}\,a_{56}, & a_{14}\,a_{25}\,a_{36}, & a_{14}\,a_{26}\,a_{35} \\ a_{15}\,a_{23}\,a_{46}, & a_{15}\,a_{24}\,a_{36}, & a_{15}\,a_{26}\,a_{34} \\ a_{16}\,a_{23}\,a_{45}, & a_{16}\,a_{24}\,a_{35}, & a_{16}\,a_{25}\,a_{34}. \end{array}$$

Znak, koji pojedini članovi imaju u razvijenom obliku pfafijana P, određuje se po broju inversija, a po ovom pravilu: ako je u permutacijama dobivenim komplementarnim permutovanjem broj inversija paran, onda članovi u kojima se javljaju takve permutacije imaju pozitivan znak u razvijenom obliku pfafijana; u suprotnom slučaju je znak članova negativan. Na primjer, u posljednjem, malo čas pomenutom pfafijanu, javlja se član $a_{12}\,a_{35}\,a_{46}$ sa znakom minus, a član $a_{12}\,a_{36}\,a_{45}$ sa znakom plus.

Da vidimo sad šta će biti sa pfafijanom P, kad se u matrici njegovoj promijene bilo znaci svih elemenata neparnih, bilo znaci svih elemenata parnih dijagonala. Pfafijan dobiven prvom transformacijom označićemo ponovo sa P', a onaj drugi sa P''.

To pitanje riješićemo sad lako, samo ćemo pri tome posebice morati proučiti ova dva slučaja.

Digitized by Google

Slučaj I. Neka je zbir kazaljaka paran broj, pa uočimo neku permutaciju $1ijkrs \ldots tu$ $(i = 2, 3, \ldots 2n;\ j, k, \ldots t, u = 3, 4, \ldots 2n)$ kazaljaka $1, 2, 3, \ldots 2n$. Tu permutaciju ćemo podijeliti na n ovakvih sklopova:

$$1i,\ jk,\ rs,\ \ldots\ tu. \tag{6}$$

Svaki takav sklop predstavljaće očevidno par kazaljaka u onom članu pfafijana, koji odgovara permutaciji $1ijkrs \ldots tu$, pa kako je zbir svih kazaljaka paran broj, to će se u sistemi (6) javljati paran broj sklopova, a to će reći, da će u ovom slučaju pfafijan P morati biti parnoga reda. Razredimo sad sklopove sisteme (6) u dva razreda: u razred parnih, i u razred neparnih sklopova. Pri tome ćemo parnim sklopom zvati sklop, kad je zbir elemenata toga sklopa paran broj, a kad je zbir tih elemenata neparan broj, onda ćemo i sklop zvati neparnim sklopom. Ako je sad sklop $1i$ paran, onda će i zbir

$$(j + k) + (r + s) + \ldots + (t + u)$$

biti paran broj i obratno, ako je sklop $1i$ neparan, onda će i zbir ostalih kazaljaka biti neparan broj. To znači da i u jednom i u drugom slučaju ima u sistemi (6) paran broj parnih i paran broj neparnih sklopova. Drugim riječima, u svakom članu pfafijana parnoga reda ima paran broj parnih i paran broj neparnih elemenata. Kako međutim parne dijagonale prelaze u matrici pfafijana P preko parnih, a neparne preko neparnih elemenata, to se očevidno nijedan član pfafijana P ne će promijeniti, kad se u njemu promijene bilo znaci svih parnih, bilo znaci svih neparnih elemenata. To znači da je u ovaj mah

$$P = P' = P''.$$

Dobili smo dakle ovu teoremu:

Teorema I. Kad se u matrici nekog pfafijana parnoga reda promijene znaci bilo svima elementima parnih, bilo svima elementima neparnih dijagonala, onda pfafijan nikako ne mijenja svoju vrijednost.

Slučaj II. Neka je zbir kazaljaka neparan broj. U ovaj mah može se dokazati ovo: 1-vo, da je pfafijan P neparnog reda; 2-go, da u sistemu (6) ima neparan broj

Digitized by Google

neparnih, a paran broj parnih sklopova, a to će reći da u svakom članu nekog pfafijana neparnog reda ima neparan broj neparnih, a paran broj parnih elemenata. Prema tome će svaki član toga pfafijana promijeniti svoj znak, ali vrijednost ne, kad se u njemu promijene znaci svih neparnih elemenata i obratno, nijedan član toga pfafijana nikako se ne će promijeniti, kad se u njemu promijene znaci svih parnih elemenata. To znači da je u ovaj mah

$$P' = -P.$$

a

$$P'' = P.$$

Otuda ove teoreme:

Teorema II. Kad se u matrici nekog pfafijana neparnog reda promijene znaci svima elementima neparnih dijagonala, onda se znak tome pfafijanu mijenja, ali vrijednost ne mijenja.

Teorema III. Kad se u matrici nekog pfafijana neparnog reda promijene znaci svima elementima parnih dijagonala, onda pfafijan nikako ne mijenja svoju vrijednost.

Sve te tri teoreme mogu se obuhvatiti ovom jednom teoremom:

Teorema. Kad se u matrici nekog pfafijana promijene znaci svima elementima neparnih dijagonala, onda pfafijan nikako ne će promijeniti svoju vrijednost ako mu je red bio paran, a promijeniće samo svoj znak ako mu je red bio neparan; a ako se u matrici promijene znaci svima elementima parnih dijagonala, onda se nikako ne će promijeniti niti pfafijan parnoga, niti pfafijan neparnoga reda.

Po tim teoremama je na primjer

$$\begin{matrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{matrix} = \begin{matrix} -a & b & -c \\ & -d & e \\ & & -f \end{matrix} = \begin{matrix} a & -b & c \\ & d & -e \\ & & f \end{matrix},$$

Digitized by Google